# 内生的成長モデルにおける出生率と子供養育費

趙　彤
（徳島大学総合科学部専任講師）

内生的人口モデルは，親が子供に対して利他的であることが仮定される王朝型人口モデルが用いられ，Becker and Barro（1988）と Barro and Becker（1989）によってモデル化されている。さらに Barro and Sala-i-Martin（1995）は連続時間型で内生的人口モデルを進化させている。本稿では Barro and Sala-i-Martin（1995）の連続時間型人口モデルをベースにして，子供の養育費に関する設定を改善した上，先進国の出生行動に的を絞って内生的人口モデルを展開する。

Barro and Sala-i-Martin（1995）では，子供の養育費が一人当たり資本の増加関数と設定され，それがマイナス項として家計の予算制約式に表出する。この設定に従うならば，資産があればあるほど子供の養育費が上昇するという非現実的なインプリケーションがもたらされる。さらにこのような設定によって市場経済の非効率性が生じる。つまり市場経済下での結果と計画経済下でのそれとが異なってくる。

それに対して本稿では，子供の養育費が親の賃金率の増加関数であると仮定する。この仮定によって子供の養育費は親の機会費用であるという性質が一層明確になる。さらに上述の非効率性の問題もまた解決する。そして出生率と子供の養育費の間にネガティブな関係が存在することを明らかにしている。つまり子供の養育費を政策的に低下させることが少子化社会を是正する有効な政策であることを提言している。

本稿の構成は以下のようである。まず第Ⅱ節でモデルの設定を行う。続いて第Ⅲ節でモデルの最適化を行い，移行動学における出生率と子供の養育費との関係を解明する。そして第Ⅳ節でモデルから得られたインプリケーショ

ンを吟味し，結論をまとめる。

## Ⅱ　モデルの設定

Becker and Barro（1988）と Barro and Becker（1989）は王朝モデルを用いて最適出生率の選択を初めてモデル化している。彼らのモデルでは，成人（親）が子供と利他的に結びつけられ，財消費から効用を得ると同時に，子供の効用からも効用を得ることが仮定される。子供の数は子供から得られる効用と子供の養育がもたらす不効用に基づいて選択される。

Becker and Barro（1988）の効用関数は次のように仮定されている。

(1)　$$U_i = u(c_i, n_i) + \tau(n_i) \cdot n_i \cdot U_{i+1}.$$

ここで $i$ は個人が成人である期間であり，$U_i$ は $i$ 期における成人の効用，$c_i$ は成人一人当りの消費，$n_i$ は成人一人当りの子供の数である。項 $u(c_i, n_i)$ は成人期における消費と子供の存在によってもたらされる効用である。$U_{i+1}$ は子供が成人になったときに得る効用を表す。(1)式右辺の第二項は子供の効用が成人のそれにもなることを表す。これは王朝型モデルの本質を示している。ただし親はすべての子供を平等に扱い，すべての子供が同じ効用 $U_{i+1}$ を達成すると仮定する。関数 $\tau(n_i)$ は親の子供に対する利他の程度を表している。ここで関数 $\tau(n_i)$ を次のような弾力性一定の関数に特定化する。

(2)　$$\tau(n_i) = \tau n_i^{-\varepsilon}.$$

ただし $0 < \tau < 1$，$\varepsilon > 0$ である。$\tau > 0$ は成人の子供に対する利他の程度を表し，$\tau < 1$ は成人の利他主義の限界，あるいは成人の利己主義を反映すると考えればよい。条件 $\varepsilon > 0$ は子供の数 $n_i$ に対する収穫逓減を表す。

(2)式を(1)式に代入すれば，第 $i$ 世代の $U_i$ は無限期先の世代までの各世代の効用の和として次のように表わせる。

(3)　$$U_i = \sum_{j=i}^{\infty} \tau^{j-i} (N_j)^{1-\varepsilon} u(c_j, n_j).$$

$N_j$ は第 $j$ 世代における成人の子孫の総数である。ここで $j = i$ 期における総人口を1と基準化する。従って $j > i$ の時，総人口は $n_i$ の積に一致する。ただし $N_i$ と $n_i$ は独立である[1]。さらに $u(c_j, n_j)$ を限界効用の弾力性が一定

である次のような関数に特定化する。

$$u(c_j,n_j)=\frac{[c_j(n_j)^{\gamma}]^{1-\theta}}{1-\theta}. \tag{4}$$

ただし$\gamma>0$, $\theta>0$である。また$u(c_j,n_j)$が$n_i$に関して限界効用逓減を保つために，$\gamma(1-\theta)<1$を仮定する。ここで計算の便宜上，新たな変数を定義する。

$$\Psi=\frac{1-\varepsilon}{1-\theta}.$$

ただし$0<\Psi<1$を仮定する。(4)式を(3)式に代入すると，次式が得られる[2]。

$$U_i=\sum_{j=i}^{\infty}\frac{\tau^{j-i}[(N_j)^{\Psi}c_j(n_j)^{\gamma}]^{1-\theta}}{1-\theta}. \tag{5}$$

この離散型モデルは家計の世代間の予算制約式を導入すればモデルを完結することができる。離散型 OLG モデルは出生率の研究にとって有益であることには違いないが，欠点もまた存在する。例えば期間の長さを集計するには，所与の時点においてさまざまな年齢の子持ち家計を加算しなければならない。さらに計算上不都合な箇所も存在する。Barro and Sala-i-Martin (1995) をはじめ Assaf and Yuan (1995)，Theodore (1995, 1996) など多くの先行研究では離散型ではなく連続時間型モデルを用いている。連続時間型の接近方法は，家計のレベルにおいては現実性を欠いているが，国民経済全体から見れば離散型モデルよりも適切であり，解析分析においてはより明快な結論が導かれるといった理由が存在する。

**効用関数**　(5)式の離散時間型モデルの効用関数を標準的な連続時間型ラムゼイ・モデルに修正すれば次のようになる。

$$U=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\rho t}}{1-\theta}\left[(N^{\Psi}\cdot c\cdot n^{\gamma})^{1-\theta}-1\right]dt. \tag{6}$$

ここで$n\geq 0$は出生率である。項$e^{-\rho t}$は(5)式における利他主義の程度を表す項$\tau^{j-i}$に対応する。つまり時間選好が子供の人数に依存し，子供の養育には資源が必要であることを表している。

**出生と死亡**　子供出生率と死亡率をそれぞれ$n$と$d$で示すならば，総人

口の変化は次のように表せる。

$$(7) \qquad \dot{N}=(n-d)N.$$

ただし$d>0$は子供の死亡率を表し，家計の所得や年齢構成に依存しないと仮定する。

**子供の養育費**　子供一人当たりの出産や養育などにかかる費用を$\eta$とする。実際，出産費用は短期間に一括で払われると考えられるが，養育費用に関してはかなり長期に渡って支出されるであろう。だが本稿では子供の養育費用$\eta$が出産の時点ですべて支出されると仮定する。$\eta$を長期間に渡る子供の養育費の出産時点における現在価値と考えるならば，この想定は自然である。従って子供の養育費に関する総支出は$\eta nN$となる。

子供の養育費は経済発展と共に上昇していくということが事実である限り，養育費用$\eta$を市場における財・サービスのみの購入費用で表すならば，経済成長につれて出生率も大きくなるはずである。しかし現実の先進国の間ではむしろ少子化に悩まされている。Becker [1991]，速水 [1989] および他の文献では，子供の養育費には市場での財・サービスの購入費に加えて（特に子供の世話をする女性の）養育による機会費用が含まれると主張されている。経済成長と技術進歩によって，市場の財・サービスの価格変化は養育費の直接費用にはさほど影響をあたえないが，賃金率の上昇による機会費用の上昇は養育費を上昇させると考えられる。

よって子供の養育費を親の賃金率$w$の増加関数と設定し，次のような線形関係が成立すると仮定する。

$$\eta=b_0+bw.$$

ここで$b_0\geq 0$，$0<b<1$である。$b_0$は子供の養育に関する財・サービスの費用を表し，$bw$は親の賃金率の上昇と共に増加する費用，つまり親の子供養育による機会費用を表す。Barro and Sala-i-Martin (1995) では子供の養育費$\eta$が賃金率$w$ではなく一人当たり資本$k$の増加関数と設定されている。現実社会では資本$k$を多く持つ女性（金持ちと考えればよい）は必ず養育による機会費用が高いとは言いがたい。こうした設定は後の移行動学を簡易化するためのものであろう。またこの設定によってBarro and Sala-i-Martin

(1995)では,計画経済に比べて市場経済の非効率性が存在することになる。

計算の便宜上，$b_0=0$ を仮定する[3]。従って上式は

$$\eta = bw \tag{8}$$

に簡略化される。家計当たりの子供養育費は $\eta n = bnw$ であり，それは家計の予算制約式において右辺にマイナス項として表れる。

予算制約式　家計の収入は各成人の賃金率 $w$ と家計の資産による資産収益 $rk$ の和であるとする。ここで各家計の賃金率 $w$ が同じであり，成人になる瞬間からもらえると仮定する。従って家計の予算制約式は次のように表される。

$$\dot{k} = w + (r - n + d)k - bnw - c. \tag{9}$$

**生産関数**　各成人が労働市場にコンスタントに1単位の労働を提供するとする。従って $N$ は総成人人口であると同時に，総労働人口でもある。財の生産関数はコブ・ダグラス型の関数 $Y = AK^{\alpha}N^{1-\alpha}$（ただし，$0<\alpha<1$）で表せると仮定する。外生的な技術進歩がないとし，完全競争のもとで，利潤最大化を図る企業の賃金率 $w$ と利子率 $r$ はそれぞれ次式で示される。ただし減価償却がないと仮定する。

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}N^{1-\alpha} = \alpha Ak^{\alpha-1}; \tag{10}$$

$$w = \frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)AK^{\alpha}N^{-\alpha} = (1-\alpha)Ak^{\alpha}.$$

## Ⅲ　最適条件と移行動学

**最適条件**　以上の設定のもとで，家計の最適問題は(6)式の効用関数を最大化し，制御変数 $n$ と $c$ の経路を選択することである。この最大化問題の制約条件は(9)式における予算制約式，不等号条件である $c>0$ と $n \geq 0$，および横断条件 $\lim_{t\to\infty} \nu k = 0$ と $\lim_{t\to\infty} \mu N = 0$ である。ただし，ここの $\nu$ と $\mu$ はそれぞれ状態変数のシャドゥ・プライスである。よって以下のようなハミルトニアンを設定する。

$$H=\frac{e^{-\rho t}}{1-\theta}\left[(N^{\Psi}\cdot c\cdot n^{\gamma})^{1-\theta}-1\right]+\nu\left[w+(r-n+d)k-bnw-c\right]+\mu(n-d)N.$$

通常の計算方法で１階の条件から次のような式が得られる。

(11) $$\nu=e^{-\rho t}N^{\Psi(1-\theta)}\cdot c^{-\theta}\cdot n^{\gamma(1-\theta)};$$

(12) $$\gamma e^{-\rho t}N^{\Psi(1-\theta)}\cdot c^{(1-\theta)}\cdot n^{\gamma(1-\theta)-1}-\nu(k+bw)+uN=0;$$

(13) $$\dot{\nu}/\nu=-(r-n+d);$$

(14) $$\Psi e^{-\rho t}N^{\Psi(1-\theta)-1}\cdot c^{(1-\theta)}\cdot n^{\gamma(1-\theta)}+\mu(n-d)=-\dot{\mu}.$$

(11)式の両辺の対数をとって時間 $t$ で微分し，(13)式を代入すると，一人当たり消費 $c$ に関する成長率が得られる。

$$\frac{\dot{c}}{c}=\left(\frac{1}{\theta}\right)\left[r-\rho-(n-d)+\Psi(1-\theta)\frac{\dot{N}}{N}+\gamma(1-\theta)\frac{\dot{n}}{n}\right].$$

ここで対数型効用関数，つまり $\theta=1$ のケースを考えてみよう[4]。このケースでは上式は次のように簡単化される。

(15) $$\frac{\dot{c}}{c}=r-\rho-(n-d).$$

通常の連続時間型 OLG モデルと同じく，消費の増加率は利子率 $r$ の増加関数，時間選好率 $\rho$ の減少関数である。それと同時に純人口成長率 $n-d$ に減殺される。ここで分析の便宜上，新たな変数 $\Omega$ を定義する。

$$\Omega=\frac{k+bw}{c}-\frac{\gamma}{n}.$$

(12)式に(11)式を代入し，さらに $\Omega$ の定義式を代入すると，

(16) $$\mu=e^{-\rho t}N^{\Psi(1-\theta)-1}\cdot c^{1-\theta}\cdot n^{\gamma(1-\theta)}\cdot\Omega$$

が成立する。上式の両辺の対数を取り，時間 $t$ について微分した上，(14)式を代入すると，次の $\Omega$ の運動式が得られる。

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}=-\Psi/\Omega-(n-d)+\rho-[\Psi(1-\theta)-1](n-d)-(1-\theta)[r-\rho-(n-d)]-\gamma(1-\theta)\frac{\dot{n}}{n}.$$

そして再び $\theta=1$ という条件を使うと，上の微分方程式は次のように単純化される。

(17) $$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -\Psi/\Omega + \rho$$

この微分方程式の一般解は

$$\Omega = \Psi/\rho + [\Omega(0) - \Psi/\rho] \cdot e^{\rho t}$$

である。$\theta = 1$ の時，この解を(16)式に代入すると，

$$\mu N = (\Psi/\rho) \cdot e^{-\rho t} + \Omega(0) - \Psi/\rho$$

となる。$N$に関する横断条件より$\lim_{t \to \infty} \lambda N = 0$を満たさねばならないので,$t \to \infty$のとき $e^{-\rho t} = 0$ になることから，$\Omega(0) = \Psi/\rho$ でなければならない。従って最適行動であるためには、すべての時点において$\Omega$は定常状態値$\Psi/\rho$ に一致しなければならない。この条件を$\Omega$の定義式に代入し，出生率$n$ について解くと，次の式が得られる。

(18) $$n = \frac{\gamma \rho X}{\rho + \rho b(1-\alpha)Z - \Psi X}.$$

ただし$X \equiv c/k$，$Z \equiv Ak^{\alpha-1}$ である。他の変数とパラメータが不変のもとでパラメータ$\Psi$ と$\gamma$が上昇すると，それぞれ付随する$n$ と$N$ の限界効用が上昇するので（効用関数(6)式を参照されたい）出生率が大きくなる。$\rho$ が上昇すると全体の効用が減少するので（効用関数(6)式を参照されたい）結果として出生率$n$ が小さく選択される。さらに変数$X$ と$n$ の間のポジティブな関係は(18)式から読み取れる。予算制約式(9)において$X$ の上昇は一人当たり資本の成長率$\dot{k}/k$ が減少することを意味する（(9)式の両辺を$k$ で割る)。よって合理的な個人はこの減少を阻止するために$n$ を増加させることになる。さらに他のパラメータが不変のもとで，子供の養育費（親の機会費用）の大きさを表すパラメータ$b$ は出生率$n$ とネガティブな関係にあることが分かる。

**移行動学**　$X$ の定義式の両辺の対数をとり，時間$t$ で微分して(9)式，(10)式，(15)式および(18)式を代入すると，$X$ に関する運動式が得られる。

(19) $$\frac{\dot{X}}{X} = -\rho - (1-\alpha)Z + X + b(1-\alpha)nZ.$$

同じように$Z$ の定義式の両辺の対数をとり，時間$t$ で微分して(9)式，(10)式

および⒅式を代入すると，$Z$ に関する運動式が得られる。

⒇ $$\frac{\dot{Z}}{Z}=-(1-\alpha)\{Z-X-[1+b\,(1-\alpha)Z]n+d\}.$$

位相図を描くために，⒆式と⒇式をそれぞれ $\dot{X}=0$，$\dot{Z}=0$ とおく。よって次のような二本の方程式が得られる[5]。

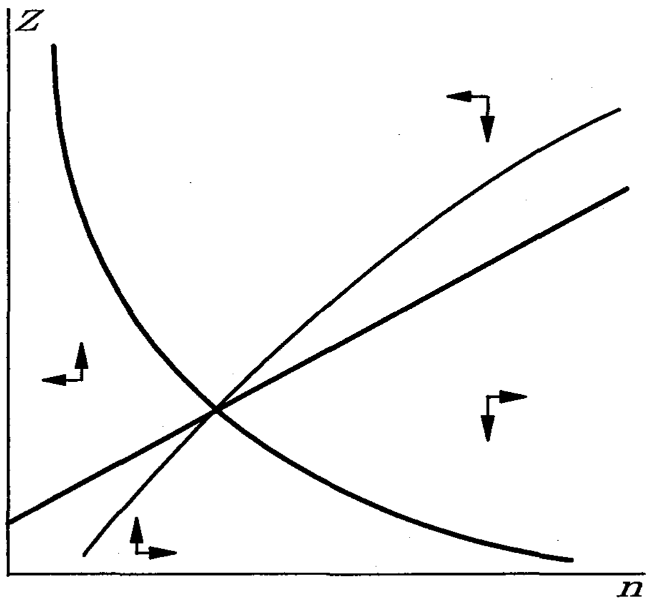



図 1

(21) $$Z=\frac{1}{\alpha}(n+\rho-d)\,;$$

(22) $$Z=\frac{\rho\,(1-\Psi)\,n-\gamma\rho^2}{(1-\alpha)[-\Psi bn^2-(\rho b+\gamma\rho b-\Psi)\,n+\gamma\rho]}.$$

図 1 の $(n,Z)$ 平面において,(21)式は右上がりの直線で示され,不安定である。(22)式は，変数 $Z$ と $n$ が非負であれば右下がりの曲線で示され（数学付録を参考されたい)，安定的である。これらの二つの線によって持続状態の値 $n^*$ と $Z^*$ が決定される。さらに全体としてはサドル経路安定性が成立する。$(n,Z)$ 変面では安定的なアームは右上がりの曲線である。

もし経済の初期出発点が $Z(0)>Z^*$（すなわち，$k(0)<k^*$）であれば，$Z$ が低下するにつれて出生率 $n$ も持続状態値に向かって単調的に減少することになる。逆に，もし経済の初期出発点 $Z(0)<Z^*$ が（すなわち，$k(0)>k^*$）

であれば，$Z$ が上昇するにつれて出生率 $n$ は単調的に増加することになる。

## Ⅳ　インプリケーションと結論

図1で示されるように，移行過程において $n$ と $Z$ の間にはポジティブな関係が存在する。$Z$ の減少すなわち $k$ の増加につれて $n$ が単調に減少する。これは経済成長に伴って出生率が絶えず低下することを意味する。いわば先進国における経済成長に伴う少子化問題である。

我々は，王朝モデルの枠組みの中で子供の養育費が一人当たりの資本の増加関数であるという Barro and Sala-i-Martin（1995）の設定を修正し，子供養育費が賃金率の増加関数であると仮定した。そして経済成長（一人当たり資本の増加）と共に出生率が減少するという結論を得た。この結論は Barro and Sala-i-Martin（1995）の結論と類似したものであるが，それとは異なる，無理のない仮定の下で成立している。また Barro and Sala-i-Martin（1995）において存在しうる非効率性は，本論文の設定のもとでは生じないのである。

さらに⒅式における出生率に影響を及ぼすパラメータの中で，$b$ を除く $\rho$，$\gamma$，$\Psi$，および $\alpha$ といったパラメータは構造的・文化的なものであり，それほど変化しないであろう。よって最も重要なパラメータは子供の養育時間を表す $b$ である。⒅式から分かるように，$b$ と $n$ の間にはネガティブな関係が存在する。先進国においては，子供の身の回りの面倒を見る時間よりも子供の教育に費やす時間の方がはるかに多いであろう。従って少子化を阻止するためには，パラメータ $b$ を政策的に減少させるしかないのである。Becker，Murphy and Tamura（1990）等は人的資本という概念を用いて，人的資本と出生率がネガティブな関係にあるという命題を提示した。本論文では人的資本は導入していないが，子供の養育費の上昇は出生率の低下を招くという相似したインプリケーションが示されている。

---

[1] 言い換えると，親の数が増えても出生率は変わらないということである。

[2] Barro and Sala-i-Martin［1995］においてこの式は

$$U_i = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\tau^{j-i}\left\{[(N_j)^{\Psi} \cdot c_j \cdot (n_j)^{\gamma}]^{1-\theta} - 1\right\}}{1-\theta}$$

と仮定されている。$\theta$ が1に近づくにつれて大括弧の中の式が対数関数に漸近するよう，$-1$ を付け加えているのである。

[3]後の計算より明らかなように，$b_0$ が変化しない限り結果は変わらない。

[4]この理由についてはBecker and Barro［1988］，Barro and Becker［1989］を参考されたい。

[5]⒆式と⒇式において $\dot{X}=0$，$\dot{Z}=0$ とすれば

$$-\rho-(1-\alpha)Z+X+b\,(1-\alpha)nZ=0\,; \qquad ①$$

$$Z-X-n-b\,(1-\alpha)nZ-\delta+d=0 \qquad ②$$

となる。よって①+②より㉑式が得られる。さらに①の $X$ を⒅式に代入，整理すれば㉒式が得られる。

## 数学付録

㉒式の右辺の分母を0とし，整理すると，

$$(1-\alpha)[\Psi bn^2+(\rho b+\gamma\rho b-\Psi)n-\gamma\rho]=0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Psi bn^2+(\rho b+\gamma\rho b-\Psi)n-\gamma\rho=0 \quad \Longrightarrow \quad (\Psi n+\gamma\rho)(bn-1)=-\rho bn$$

になる。$n$ について解き，解を $q_1$，$q_2$（$q_1<q_2$）とすれば次のような条件が成立する。

$$q_1<-\frac{\gamma\rho}{\Psi}<0,\ \ 0<q_2<\frac{1}{b}.$$

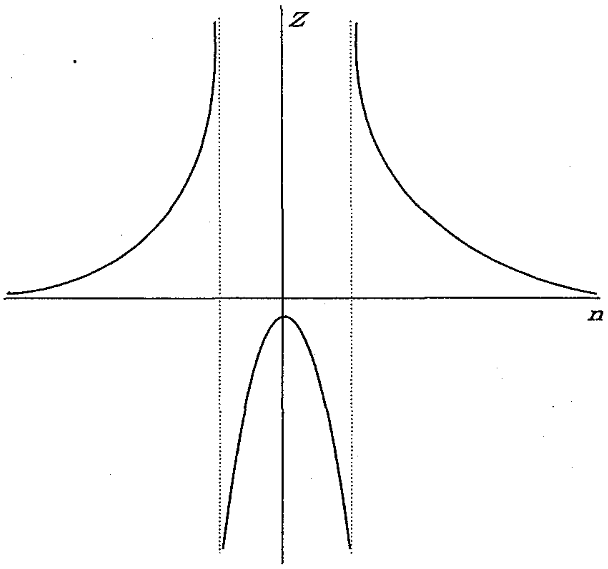
つまり一つはプラス，もう一つはマイナスという二つの実数根が存在する。これは㉒式が $(n,Z)$ 平面において一本がプラス，もう一本がマイナスの垂直の漸近線をもつことを意味する。また $n\to\infty$ になれば $Z\to 0$ になるから，㉒式が $(n,Z)$ 平面において $Z=0$ という水平の漸近線をもつことが分かる。ここで，㉒式を $n$ について微分すると，

$$\frac{\partial Z}{\partial n}=-\frac{\rho\,(1-\Psi)[\Psi bn^2+(\rho b+\gamma\rho b-\Psi)n-\gamma\rho]}{(1-\alpha)[\Psi bn^2+(\rho b+\gamma\rho b-\Psi)n-\gamma\rho]^2}$$

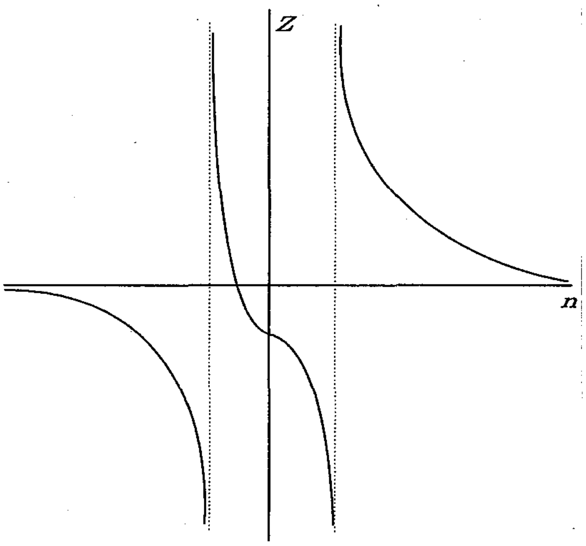
$$-\frac{[-\rho\,(1-\Psi)n+\Psi\rho^2][2\Psi bn+\rho b+\gamma\rho b-\Psi]}{(1-\alpha)[\Psi bn^2+(\rho b+\gamma\rho b-\Psi)n-\gamma\rho]^2}$$

になる。$0 < \Psi < 1$ なので $-\rho(1-\Psi) < 0$ になる。$[\Psi b n^2 + (\rho b + \gamma \rho b - \Psi) n - \gamma \rho] > 0$ とあわせると，右辺の分子の第一項が負であることがわかる。(22)式から分かるように分母が正であるから，$Z$ が非負であるためには $-\rho(1-\Psi) n + \Psi \rho^2 > 0$ でなければならない。この条件を用いれば右辺分子の第二項が負であることがわかる。この二つの条件を合わせると，$n$ と $Z$ が非負である限り $\partial Z/\partial n < 0$ になる。さらに(22)式に $n=0$ を代入すると $Z = -\dfrac{\rho}{1-\alpha} < 0$ となる。

以上の三つの結果をまとめると，図A－1あるいは図A－2が成立する。$n$ と $Z$ が両方とも非負である場合，右下がりの曲線になることが分かる。




図A－1




図A－2

## 参考文献


Barro, R. J., and G. S. Becker, "Fertility Choice in a Model of Economic Growth", *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, (March, 1989), pp. 481-501.

Barro, R. J., and X. Sala-i-Martin, "*Economic Growth*", New York, McGraw-Hill, 1995.（大住圭介訳『内生的経済成長論Ⅰ，Ⅱ』，九州大学出版会，1997年，1998年。）

Becker, G. S., "*The Demand for Children*", Harvard University Press, 1991.

Becker, G. S., and R. J. Barro, "A Reformulation of the Economic Theory of Fertility", *Quarterly Journal Economics*, Vol. 103, No. 1, (February, 1988), pp. 1-25.

Becker, G. S., K. M. Murphy, and R. Tamura, "Human Capital, Fertility, and Economic Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, (October, 1990), part II, pp. S 12-S 37.

Palivos, T., "Endogenous Fertility, Multiple Growth Paths, and Economic Convergence", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 19, No. 8, (November, 1995), pp. 1489-1510.

Palivos, T. and Carol, A. S., "Fertility, Growth and the Financing of Public Education and Health", *Journal of Population Economics*, Vol. 9, No. 4, (September, 1996), pp. 415-428.

Razin, A. and Yuen, C. W., "Utilitarian Tradeoff between Population Growth and Income Growth", *Journal of Population Economics*, Vol. 8, No. 1, (February, 1995), pp. 81-87.

速水佑次郎『開発経済学』創文社　1989。