

ジョセフソン接合素子を含む回路に生じるヘテロクリニック軌道

正員 上田 哲史[†] 正員 川上 博[†]

Bifurcation of Heteroclinic Orbits in a Circuit Containing a Josephson Junction Element

Tetsushi UETA[†] and Hiroshi KAWAKAMI[†], Members

あらまし ジョセフソン接合素子を含む回路の回路方程式や、回転方向に弾性復元力の働く振り子の運動方程式などは、状態に関する三角関数の項と線形項の和を含んだ2階の常微分方程式で記述される。このような力学系は、平衡点の数がパラメータの値によって変わり、平衡点の位置に関して周期性をもたなくなるため解析が難しい。本論文では、この力学系の例としてジョセフソン接合素子を含む回路を取り上げ、平衡点の接線分岐による分類および相平面上に生じるヘテロクリニック軌道に着目した解析の結果を述べる。ヘテロクリニック軌道は、その構造不安定性により、相平面上での大域的な分岐を表す。この軌道の生じるパラメータを分岐の値として、パラメータ平面上で分岐集合を求めた。その際、分岐曲線によって囲まれる一つのパラメータ領域に、唯一決まるまつわり数を定義した。これは、軌道の相平面での回転の指標として用いることができ、更に分岐集合と組み合わせることによって、安定平衡点の引力圏の分類を可能にした。

キーワード ジョセフソン接合素子、ヘテロクリニック軌道、まつわり数

1. まえがき

角度が状態変数となる力学系、ジョセフソン接合素子(以下、JJ素子と略記する)を含む回路、回転する剛体、平面および球面振り子、ロボットのアーム運動などは、その運動方程式が角度に関する三角関数を含んだ常微分方程式で記述される。この力学系の状態空間は、角度と角速度の積空間からなる多様体となり、運動は状態空間の性質を反映して特有の非線形現象をもつ。このような力学系の解析として、定値外力を加える場合は文献(1)、(2)などで、周期的外力を加える場合は文献(3)で詳しく報告されている。

そこで、更に上述の系に回転方向に弾性復元力が働く場合を考える。すなわち、運動方程式に状態に関する線形項が付加される。この運動方程式は、文献(4)で解析されている、二つの振り子を弾性復元力の働く梁で結合した系において、一方の振り子を固定した場合に相当する。この線形項のために、平衡点の数が線形項の係数の値によって変化し、また、解の周期性も失われて、状態空間をシリンダ相平面上にみなすことが

できなくなっている。

また、この系の各安定平衡点に関する引力圏の位相的性質はパラメータの変化に伴って変化する。この変化の分岐値(臨界値とも言う)では、サドル型平衡点間のヘテロクリニック軌道が存在する。特に系の減衰定数が小さくなった場合、種々のヘテロクリニック軌道が存在することが明らかとなった。本論文の特徴は、これらヘテロクリニック軌道の位相的性質を考慮した大域的分岐現象を解析した点にある。

本論文では、上述の力学系の一例としてJJ素子を含むL-G-C並列回路を構成し、この回路に直流電流源を接続する場合の解析を行う。まず静的な解析として、パラメータによる平衡点の接線分岐線図を求め、パラメータと解に関する周期性を説明する。このことより解析すべきパラメータ範囲を制限できることを示す。

次に、ヘテロクリニック軌道の生じるパラメータを計算し、これを分岐の値とする分岐集合をパラメータ平面上で求めた。同時に、分岐曲線によって囲まれるパラメータ領域にただ一つ定まる指標としてまつわり数を定義した。分岐集合とまつわり数を合わせて、安定平衡点の引力圏の分類が可能になった。また、まつわり数の増減に関して余次元2の分岐が関与することも示した。

[†] 徳島大学工学部, 徳島市
Faculty of Engineering, Tokushima University, Tokushima-shi,
770 Japan

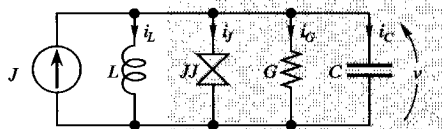


図1 ジョセフソン接合素子を含む回路
Fig.1 A parallel circuit of L and Josephson junction element.

2. 回路方程式

図1は、JJ素子の接合部の等価回路(網がけの部分)と、線形インダクタ L との並列接続において、直流電源 J を接続した場合を示している。JJ素子の等価回路において、適当な物理的条件のもとに、電流電圧特性は次式で表される⁽⁵⁾。

$$i_j = I_c \sin \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} v \tag{1}$$

実際の接合では、コンダクタンス G は電圧制御型非線形特性をもつが、本論文では定性的考察を簡単にするため、 G は線形であると仮定する。 \hbar はプランク定数、 ϕ は JJ 素子接合面中央の波動関数の位相差を表す。この関係を用いて導出した回路方程式は

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky - cx - \sin x + B_0 \tag{2}$$

となる。ここに、

$$k = G \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c C}}$$

$$c = \frac{\hbar}{2eLI_c}$$

$$B_0 = \frac{J}{I_c} \tag{3}$$

とおいた。

3. 平衡点の分類

式(2)の平衡点の個数は、パラメータ c と B_0 の値によって変化する。それらを (B_0, c) 平面で分類した。式(2)および図2, 3により、次の性質がわかる。

(1) 図中の線分(直線 X, Y および点線 a, b は除く)は、接線分岐を表す。すなわち、これらは平衡点の個数の増減にかかわる分岐曲線となっている。分岐曲線によって囲まれた領域には一定個数(奇数個)

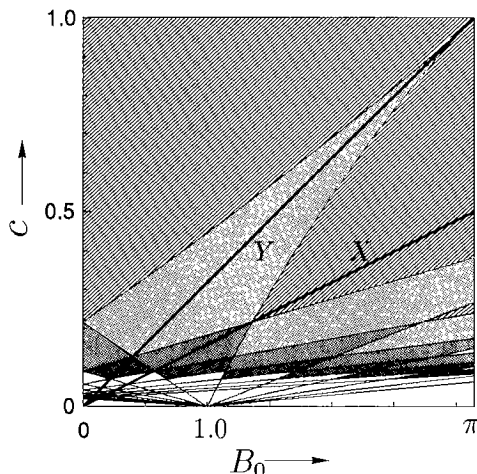


図2 平衡点の分類(斜線には1個, 点線には3個, 黒線には5個の平衡点が存在し、 c が小さくなるにつれ、平衡点の個数は増えていく)

Fig.2 Classification of the equilibrium point by number. For example, a sink is in section (斜線) and 2 sinks and a saddle are in section (点線), and 3 sinks and 2 saddles are in section (黒線), and so on. Number of equilibrium points increases as c decreases.

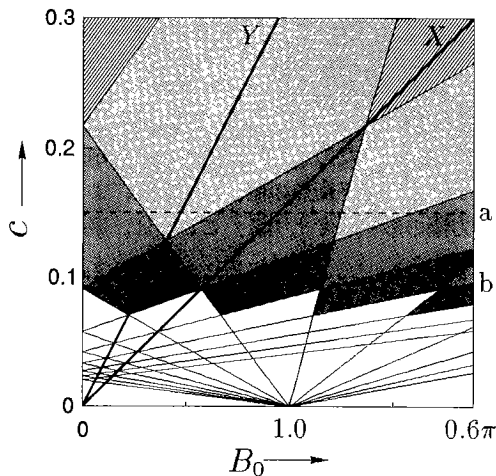


図3 図2の拡大図
Fig.3 Magnification of Fig.2.

の平衡点が存在する。

(2) $c > 1$ では1個の平衡点しか存在せず、 c の値が小さくなるにつれ多くの平衡点が出現し、 $c = 0$ で無限個となる。

(3) 固定した c について、式(2)は x と B_0 に対して、次の変換で不変となる。

$$(x, B_0) \rightarrow (x + 2n\pi, B_0 + 2nc\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{4}$$

そこで、任意の B_0 について、

$$B_0 = B_0^* \bmod 2c\pi \tag{5}$$

と表すことができる。ここに $0 \leq B_0^* < 2c\pi$ である。従って、図2中の直線 $B_0=0$ と、直線 $B_0=2c\pi$ (直線 X) に挟まれた領域ですべてのパラメータが表現できる。

(4) 固定した c について、式(2)は x と B_0 に対して、次の変換で不変である。

$$(x, B_0) \rightarrow (2n\pi - x, 2nc\pi - B_0), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{6}$$

この性質と、性質(3)の B_0^* を用いると、図2において、次のことが言える： (x, B_0) について、 $0 \leq B_0^* < c\pi$ と $c\pi \leq B_0^* < 2c\pi$ の二つの領域は、 $B_0=c\pi$ (直線 Y) に関して軸対称となり、互いの領域の相平面は次の変換で同値となる。

$$(x, y) \rightarrow (2\pi - x, -y) \tag{7}$$

(5) c を一定にし、 B_0 を変化させた場合、平衡点の個数は2個を単位に増減を繰り返す。例えば図3中の点線 $a(c=0.15)$ は平衡点が3個の領域と5個の領域のみと交わり、点線 $b(c=0.1)$ は平衡点が5個と7個の領域のみ交わっている。

これらの考察によって、検討すべきパラメータ領域がかなり制限でき、結果の類推も可能となる。

4. ヘテロクリニック軌道とまつわり数

式(2)で表された力学系は、パラメータが変化することにより、安定平衡点の個数が変わり、よってそれらの引力圏の形状も変化する。ここでは、平衡点および相平面上の軌道のパラメータによる変化を定性的に観察する指標として、まつわり数を定義し、ヘテロクリニック軌道とのかかわりを考察する。

式(2)において、 $k > 0$ 、 $c = c_0$ (正の定数) とし、このパラメータで生じ得る最大数 $2m+1$ 個の平衡点をもつように B_0 を与えるものとする。一般に式(2)の平衡点は x 軸上に並ぶため、その左端から順番に座標に自然数の添字を付け、 $(x_i, 0)$ で表す。平衡点の種類は、安定平衡点とサドルの2種類で、それぞれ S, D の記号を用いることにする。記号の添字は、 S と D それぞれ独立に、 x 軸上に並ぶ同種類の平衡点左端から順番に自然数を用いて付けることとする。

$$S_1(x_1, 0), D_1(x_2, 0), S_2(x_3, 0), D_2(x_4, 0), \dots, S_m(x_{2m-1}, 0), D_m(x_{2m}, 0), S_{m+1}(x_{2m+1}, 0) \tag{8}$$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{2m} < x_{2m+1}$$

今、 m 個のサドルで挟まれた x 軸上の区間を L とする。すなわち、開区間

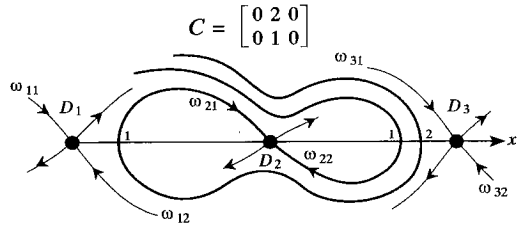


図4 まつわり数の定義
Fig. 4 Definition of linking number.

$$[D_1, D_2,]D_2, D_3[\dots,]D_{m-1}, D_m[\tag{9}$$

の合併集合を、

$$L = \bigcup_{k=1}^{m-1} [D_k, D_{k+1}[\tag{10}$$

とする。

次にサドル D_i に入る2本の ω 枝を、

$$\omega_{ij} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = D_i\}, \quad j=1, 2 \tag{11}$$

とする。

[定義] 線分 L と ω_{ij} 、 $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2$ を上記とする。このとき L と ω_{ij} のまつわり数(linking number)を、

$$l_{ij} = \# [L \cap \omega_{ij}] \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2 \tag{12}$$

と定義する。但し、 $\# E$ は、集合 E の要素の個数を表す。 l_{ij} は L と ω 枝との交差数を与えている。図4参照。まつわり数を行列表現すると $(2 \times m)$ の整数要素の行列、

$$C = [l_{ij}] \tag{13}$$

となる。これを交差行列と呼ぶことにする。例えば、図4の例では

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる。

パラメータ (B_0, k) を連続的に変化させるとき、あるまつわり数 l_{ij} が増減した場合には、必ずその変化させたパラメータ中に、ヘテロクリニック軌道が生じるパラメータ値が存在することがわかる。これは式(2)が自律系であり、解の一意性から明らかである。

また、2次元自律系においては、一般にヘテロクリニック軌道は構造的に不安定であり、これを与えるパラメータの値は分岐の値となる。従って、ヘテロクリニック軌道の生じるパラメータを数値的に求めると分岐曲線を得る。

この分岐曲線によって囲まれる領域では、上述の議論より唯一の交差行列が得られる。交差行列の値から、

サドルの α 軌道と ω 軌道の再現は容易であり, 安定平衡点の引力圏 (basin of attraction) の形状を定性的な表現で得たことになる。

5. ヘテロクリニック軌道の計算方法

本論文では, ヘテロクリニック軌道を具体的に求める方法として, 文献(6)で検討されたセパトリックス閉路の計算方法を, ヘテロクリニック軌道計算に拡張して用いた。

$t=0$ で初期値 (x_0, y_0) を出発する式(2)の解を $x(t) = \varphi(t, x_0, y_0, \lambda_0)$, $y(t) = \psi(t, x_0, y_0, \lambda_0)$ と表す。 λ_0 はパラメータである。今, サドル D_i を α 極限点に, D_j を ω 極限点にもっているヘテロクリニック軌道を $h(D_i, D_j)$ と書き, これを求めたいとする。 D_i から δ_i だけ離れた α 枝上の点を (x_α, y_α) , 同様に D_j から δ_j だけ離れた ω 枝上の点を (x_ω, y_ω) とする。ヘテロクリニック軌道の存在には, (x_α, y_α) から正時間を出発した解の τ_α 時間後の点と, (x_ω, y_ω) から逆時間を出発した解の τ_ω 時間後の点と, ある切断面 $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ で一致することが条件となる。具体的な計算法については文献(7)を参照。

6. 解析結果

6.1 $c=0.15$ の場合

この c の値は, 図3中の点線 a に対応する。この線に沿って B_0 を $B_0=0$ から X 線 ($B_0=2c\pi$) との交点まで変化させたとき発生するヘテロクリニック軌道のパラメータ分岐図を図5に示す。この図の特徴を列挙する。

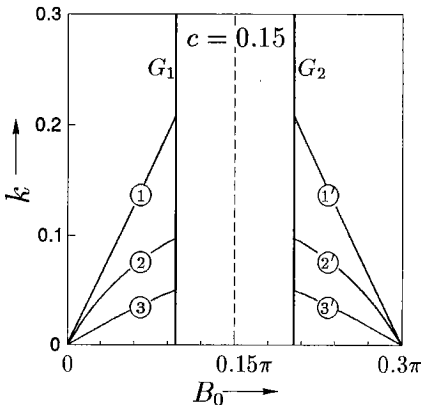


図5 $c=0.15$ でのヘテロクリニック軌道による (B_0, k) 平面分岐図
Fig.5 Bifurcation diagram in (B_0, k) by heteroclinic orbits at $c=0.15$.

(1) 図5は $B_0=0.15\pi$ (点線) について軸対称になっている。これは, 3.性質(3), (4)によるものである。

(2) 図3での点線 a と, 接線分岐曲線, すなわち, 平衡点の発生消滅に関する分岐曲線との交点が図5中の線分 G_1, G_2 に対応する。 $0 < B_0 < B_0(G_1)$ および $B_0(G_2) < B_0 < 0.3\pi$ の領域において, 安定平衡点 S_1, S_2, S_3 , サドル D_1, D_2 の五つの平衡点があり, $B_0(G_1) < B_0 < B_0(G_2)$ の領域で三つ (安定平衡点 2, サドル 1) が存在する。 $B_0(G_1)=0.3044$, $B_0(G_2)=0.6381$ 。

(3) 図5中①~③各分岐曲線の $h(D_1, D_2)$ を, それぞれ図7~9に示す。これらはいずれもサドル D_1 から D_2 に向かうヘテロクリニック軌道であるが, 相平面の位相的構造はそれぞれ異なっているものを与えている。また, k が小さくなるにつれ, D_2 の周りを幾度も巻いた軌道のヘテロクリニック軌道となる。①~③の分岐曲線は, $h(D_2, D_1)$ であり, 式(6), (7)の各変

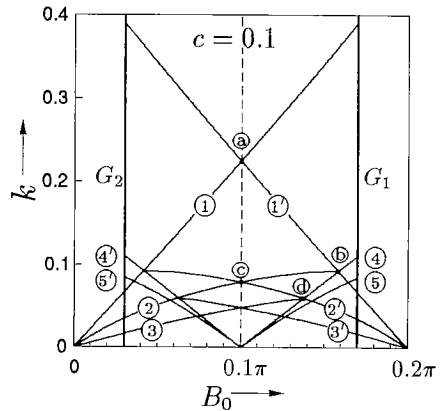


図6 $c=0.1$ でのヘテロクリニック軌道による (B_0, k) 平面分岐図
Fig.6 Bifurcation diagram in (B_0, k) by heteroclinic orbits at $c=0.1$.

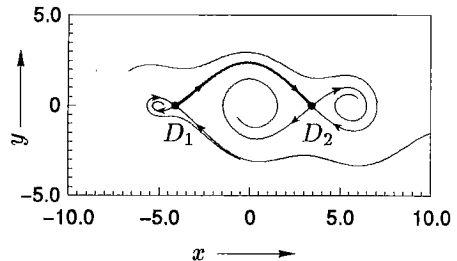


図7 図5の分岐曲線①上にパラメータを定めた場合の $h(D_1, D_2)$
Fig.7 Phase portrait of $h(D_1, D_2)$ type orbit obtained on the curve ① in Fig. 5. ($B_0=0.2, k=0.1359$)

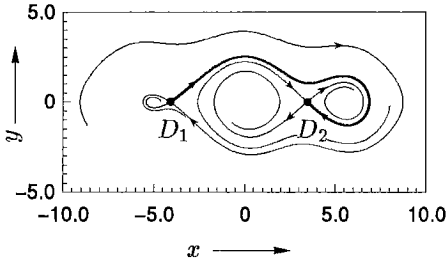


図 8 図 5 の分岐曲線②の $h(D_1, D_2)$
 Fig. 8 Phase portrait of $h(D_1, D_2)$ type orbit obtained on the curve ② in Fig. 5. ($B_0=0.2, k=0.07576$)

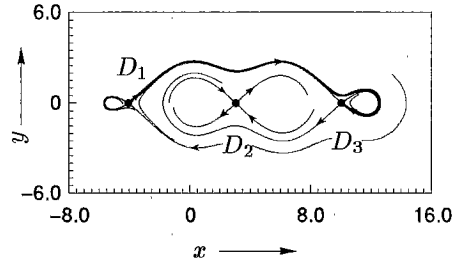


図 11 図 6 の分岐曲線⑤の $h(D_1, D_3)$
 Fig. 11 Phase portrait of $h(D_1, D_3)$ type orbit obtained on the curve ⑤ in Fig. 6. ($B_0=0.4, k=0.03798$)

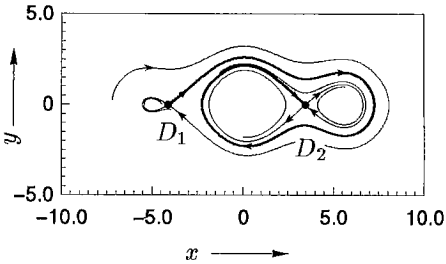


図 9 図 5 の分岐曲線③の $h(D_1, D_2)$
 Fig. 9 Phase portrait of $h(D_1, D_2)$ type orbit obtained on the curve ③ in Fig. 5. ($B_0=0.2, k=0.03508$)

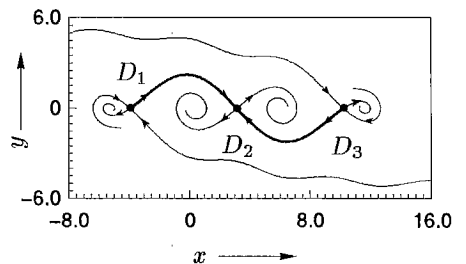


図 12 図 6 の点aで見られる $h(D_1, D_2)$ および $h(D_3, D_2)$
 Fig. 12 Phase portrait of $h(D_1, D_2)$ and $h(D_3, D_2)$ type orbits obtained on the point a in Fig. 6. ($B_0=0.3142, k=0.2248$)

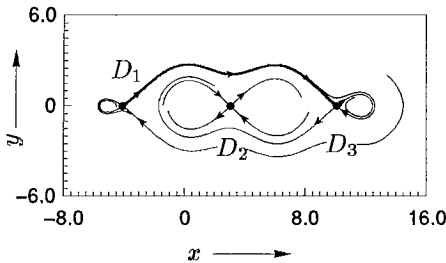


図 10 図 6 の分岐曲線④の $h(D_1, D_3)$
 Fig. 10 Phase portrait of $h(D_1, D_3)$ type orbit obtained on the curve ④ in Fig. 6. ($B_0=0.4, k=0.04327$)

換を施すと、それぞれ①～③の分岐曲線で表される軌道と一致する。

(4) 図 5 中の任意の分岐曲線と G_1 との交点は、ヘテロクリニック軌道発生と、平衡点の発生・消滅が同時に起こる余次元 2 の分岐となっている。この分岐は別計算により求めた。

6.2 $c=0.1$ の場合

この c の値は、図 3 中の点線 b に対応する。この線に沿って B_0 を $B_0=0$ から $B_0=2c\pi$ (X 線) との交点まで変化させたとき発生するヘテロクリニック軌道のパラメータ分岐図を図 6 に示す。この分岐図の性質を列挙する。

(1) 図 6 は、 $B_0=0.1\pi$ (点線) について軸対称になっている。これは 6.1 性質 (1) と同様である。

(2) 平衡点の発生消滅に関する分岐曲線が、図 6 中の G_1 および G_2 である。これらに挟まれた中の領域で平衡点が七つ (安定平衡点 S_1, S_2, S_3, S_4 , サドル D_1, D_2, D_3) あり、外側 ($0 < B_0 < B_0(G_2)$, $B_0(G_1) < B_0 < 0.2\pi$) で五つ (安定平衡点 3, サドル 2) が存在する。 $B_0(G_2)=0.09455$, $B_0(G_1)=0.5338$ 。

(3) 図 6 中の①～③分岐曲線は、それぞれ図 5 の①～③分岐曲線と位相的に同じ性質の $h(D_1, D_2)$ である。同様に図 6 中の④～⑥分岐曲線は、それぞれ図 5 の④～⑥分岐曲線と、サドルが異なるものの、位相的に同じ性質の $h(D_3, D_2)$ である。

(4) $h(D_2, D_3)$ および $h(D_2, D_1)$ の軌道は、 $k > 0$ では生じない。

(5) $c=0.15$ の場合に比べ、新しいタイプのヘテロクリニック軌道として、 $h(D_1, D_3)$ が存在し (図 10, 図 11 参照), それぞれ図 6 中の分岐曲線④, ⑤となる。またこれらの軌道について、式 (6), (7) の変換で同値となる $h(D_3, D_1)$ の分岐曲線④, ⑤が存在している。

(6) 図 6 中の点 a と c において、 $h(D_1, D_2)$ と $h(D_3, D_2)$ が同時に発生する。相平面図を図 12 と図 13

に示す。パラメータが $B_0 = c\pi$ なる対称の軸上の値をとるため、サドル $D_2(\pi, 0)$ は、変換 (6) および (7) の不動点となる。また、相平面図もこれら変換に対して不変である。

(7) 図 6 中の点 (b), (d) では, $h(D_1, D_3)$, $h(D_3, D_2)$

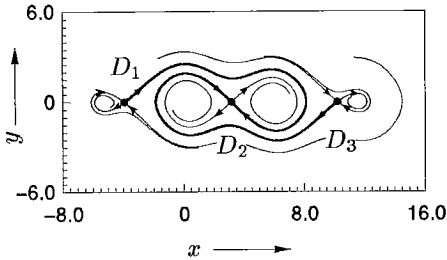


図 13 図 6 の点 (c) で見られる $h(D_1, D_2)$ および $h(D_3, D_2)$ type orbits obtained on the point (c) in Fig. 6. ($B_0 = 0.3142, k = 0.07895$).

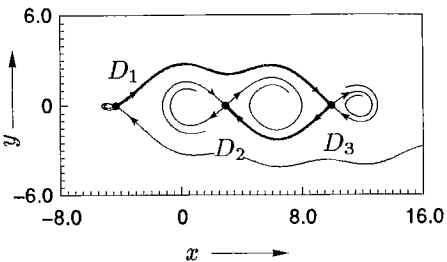


図 14 図 6 の点 (b) で見られる $h(D_1, D_3)$ および $h(D_3, D_2)$ type orbits obtained on the point (b) in Fig. 6. ($B_0 = 0.4980, k = 0.09294$).

が同時に発生する。これは、分岐曲線 (4) に対して分岐曲線 (1), (2) が交差することによる現象である。相平面図を図 14 と図 15 に示す。 D_3 は、異なるヘテロクリニック軌道同士の α 極限および ω 極限を兼ねている。従って、 $h(D_1, D_2)$ タイプの (2), (3) 分岐曲線が、これらの点で発生消滅となっているのは、 $h(D_1, D_2)$ の軌道の一部が、パラメータ (B_0, k) の変化により D_3 にゆ着するためであると説明できる。

6.3 まつわり数と分岐の詳細

図 6 を拡大し、分岐曲線に囲まれる領域の交差行列を求めたものを図 16 に示す。以下、この図について特徴を列挙する。

(1) $h(D_1, D_3)$ 分岐曲線 (5) も、6.2 の性質 (7) と同様な性質をもつ。すなわち、分岐曲線 (5) と、ある $h(D_3, D_2)$ (1, 2) などの分岐曲線との交点は、新たな $h(D_1, D_2)$ の分岐曲線 (曲線 (6)~(9)) の発生消滅の点となる。

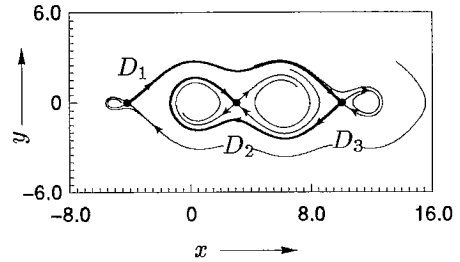


図 15 図 6 の点 (d) で見られる $h(D_1, D_3)$ および $h(D_3, D_2)$ type orbits obtained on the point (d) in Fig. 6. ($B_0 = 0.4310, k = 0.05992$).

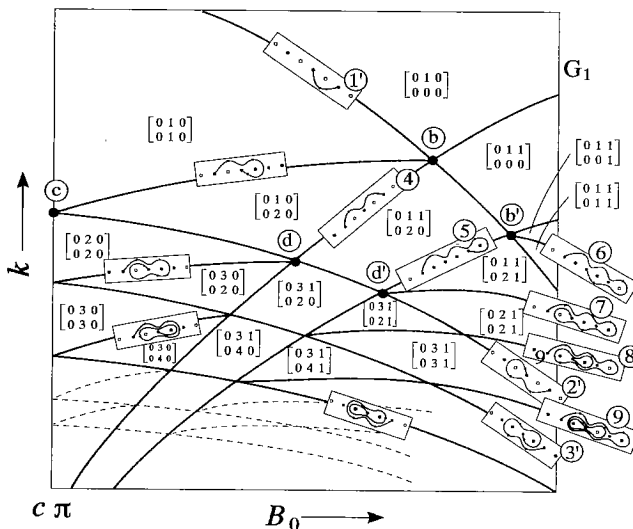


図 16 図 6 の拡大図
Fig. 16 Magnification of Fig. 6.

(2) 分岐曲線で囲まれた領域各々に、一つの交差行列 C を決めることができる。それぞれの領域から、隣り合う他の領域にパラメータ (B_0, k) が動くとき、交差行列中のいずれかの要素、すなわち、まつわり数が1だけ増減する。但し、分岐曲線④と⑤に挟まれた領域を除く。

(3) 分岐曲線④と⑤に挟まれた領域に着目する。この領域の内部は、横断する $h(D_3, D_2)$ の分岐曲線によって、小さい領域に分割されている。隣り合う小さい領域を互いに超えるようなパラメータ (B_0, k) の変化に対しては、交差行列中のあるまつわり数が2増減していることがわかる。これは、横断する $h(D_3, D_2)$ の分岐曲線が、分岐曲線④と⑤との交点(㉖, ㉗, ㉘, ㉙など)において、6.2の性質(7)の余次元2の分岐を保存することからくる現象と考えられる。

7. むすび

本論文では、式(2)について、まず (B_0, c) 平面における平衡点の接線分岐に関する分岐図を求め、定性的性質を考察した。次に、代表的な c の値について、ヘテロクリニック軌道を用いて (B_0, k) 面における分岐図を求め、まつわり数を用いて相平面図の定性的分類を行った。このことから分岐曲線に囲まれた領域には一つのまつわり数が定義できることを示した。更に余次元2の分岐のために、まつわり数の増減に特異な変化の生じるパラメータ領域が存在することを確認した。

なお、 c の値が小さい領域では、複数の平衡点を取り囲んで幾重にも回転する軌道からなるヘテロクリニック軌道が存在するが、本論文で定義したまつわり数によって、定性的に異なる相平面図の分類を行うことができる。

今後の課題として、

(1) 強制外力を加えた場合、例えば式(2)で B_0 を $B_0 + B \sin vt$ とした場合の周期解の分岐現象の解析、

(2) 多自由度系へ拡張した場合に、本論文で述べた性質がどのように変化するかを検討、
などが挙げられる。

文 献

- (1) Levi M., Hoppensteadt F.C. and Miranker W.L.: "Dynamics of the Josephson Junction", Proc. 1st Intl. Conf. on Genetic Algorithms and Their Applications, pp. 169-177 (1985-07).

- (2) Urabe M.: "The Least Upper Bound of a Damping Coefficient Ensuring the Existence of a Periodic Motion of a Pendulum under Constant Torque", J. Science of the Hiroshima University, Ser. A., 18, 3, pp. 379-389 (1955-03).
- (3) 七野 剛, 川上 博: "ジョセフソン接合素子を含む回路の解析", 信学技報, NLP84-5 (1984-06).
- (4) Levi M.: "Beating Mode in the Josephson Junction", Chaos in Nonlinear Dynamical Systems, pp. 56-73, In US Army Research Office (1984).
- (5) Van Duzer T. and Turner C.W.: "Principles of Superconductive Devices and Circuits", Elsevier North Holland, Inc. (1981).
- (6) 川上 博, 尾崎安彦: "n次元自律方程式のセパトリックス閉路の解析", 信学論(A), J-67A, 11, pp. 1098-1099 (1984-11).
- (7) 上田哲史, 川上 博: "準回転力学系のヘテロクリニック軌道", 信学'93 春大 A-85.

(平成5年5月6日受付)



上田 哲史

平2 徳島大・工・電子卒。平4 同大学院修士課程了。同年博士課程中退。同年同大助手。現在に至る。非線形回路の定性的性質の研究に従事。計測自動制御学会会員。



川上 博

昭39 徳島大・工・電気卒。昭44 京大大学院博士課程了。同年京大助手。昭45 徳島大助手。昭49 同大助教授。昭60 同大教授。現在に至る。非線形回路の動的性質に関する研究に従事。工博。