

量子論におけるレトロディクション I

井澤 健一^{a)}, 谷口 智紀^{b)}

a) 徳島大学大学院社会産業理工学研究部

b) 徳島大学大学院総合科学教育部

Retrodiction in quantum theory I

Izawa K.-I. and T. Taniguchi

Institute of Theoretical Physics, Tokushima University

Abstract

We consider retrodictive aspects of quantum theory. As a first step, we adopt quantum mechanics of a single free particle in one-dimensional space. Under successive measurements of particle position and momentum as a wave packet, we derive estimation on retrodictive probability, which happens to coincide with the expression for predictive probability into the past.

Keywords: Probabilistic interpretation, Quantum theory, Retrodiction

1 はじめに

古典論においては、物理系の現在の状態を与えると、過去の状態も未来の状態も一意的に決まっている。量子論においては、未来の状態は確率的に現実に対応する。測定直後に規格化された固有状態 $|i\rangle$ が実現する理想測定を考えると、Heisenberg 描像において初期状態 $|0\rangle$ の系の測定結果が $|i\rangle$ である確率は $|\langle i|0\rangle|^2$ と与えられる。

従って、量子論においても、未来での測定に対する通常確率解釈に則ってレトロディクション (遡時予言) を考えると、事前確率を想定すれば次のようなことが言える [1]: 初期状態 $|i\rangle$ の事前確率を p_i として、測定結果が $|0\rangle$ であったとすると、状態 $|j\rangle$ であった確率に対するレトロディクションは

$$\frac{p_j |\langle 0|j\rangle|^2}{\sum_i p_i |\langle 0|i\rangle|^2} \quad (1)$$

となる。

しかしながら、特に古典論との対応を考える場合、事前確率の設定は納まりがよくない。古典論においては、未来も過去も全く同様に予言可能となっており、現在に要求される情報は、どちらの場合も同一の“初期条件”である。

この論文では、一次元の自由粒子の場合を手始めの例として、レトロディクションについて区間推定に基づいた考察を行なう。測定モデルとしては、一定の時間間隔で逐次的に位置と運動量を同時測定する理想測定を設定する。

次節では、一次元自由粒子の波束の測定間における運動について簡単にまとめる。第 3 節では、それが最小波束へと帰着する位置運動量同時測定 [2] における予言的な確率を求める。それに基づき第 4 節で、区間推定に則ったレトロディクションを考えて、未来予言の場合の表式と比較する。第 5 節では、レトロディク

ションを意味づける際に有効な、量子論における確率解釈の頻度確率としての定式化の拡張を試みる。最終節は本論文のまとめである。

2 自由粒子

この論文では、一次元空間における自由粒子の場合を単純な例として、その波束の運動について考察しよう。波束としては、平均運動量 p を持ち空間的に局在する正規分布型の波動関数を取り扱う。

質量 m の自由粒子の Schrödinger 方程式 ($\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \quad (2)$$

の波数 k の平面波解の重ね合わせとして、波動関数を以下の様に表現する：

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk a(k) \exp\left(-ikx - i\frac{k^2}{2m}t\right). \quad (3)$$

ここで係数 $a(k)$ を

$$a(k) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \exp[-\sigma^2(k-p)^2] \quad (4)$$

と置くと、時刻 t における波動関数は

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi z^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[ipx - i\frac{p^2}{2m}t - \frac{(x - \frac{p}{m}t)^2}{4z}\right] \quad (5)$$

となる。ただし σ は正の定数であり、 $z = \sigma^2 + it/2m$ と記した。

これは、時刻 $t = 0$ においては、平均運動量が p で位置 $x = 0$ を中心とする規格化された最小波束

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(ipx - \frac{x^2}{4\sigma^2}\right) \quad (6)$$

であり、その位置の分散が σ^2 となっている。一般の時刻 $t (> 0)$ においては、波束の中心位置 $x = pt/m$ は速度 p/m で進行し、 $z = \sigma^2 + it/2m$ であるため、位置の分散は時間とともに増加することがわかる。つまり、この波束は時間発展とともに全体として広がりながら一定の平均速度で進行する。

3 同時測定

前節の粒子の運動は、観測による擾乱が無い場合であった。粒子の運動の観測としては、現実的に考えて、その位置と運動量が同時に測定される状況を想定しよう。そこでモデルとして、測定直後の波動関数が分散 σ^2 の最小波束になると設定する。

簡単のため、時間間隔 τ ごとに逐次的に測定が繰り返されるものとし、測定時刻 t から次の測定時刻 $t + \tau$ の間の時間発展を扱う。時刻 t において波動関数が平均運動量 P で $x = Q$ を中心とする位置の分散 σ^2 の規格化された最小波束である場合、時刻 $t + \tau$ における波束の波動関数 $\Psi_{P,Q}(x)$ は前節の結果から

$$\Psi_{P,Q}(x) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi z^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[iPx - i\frac{P^2}{2m}\tau - \frac{(x - Q - \frac{P}{m}\tau)^2}{4z}\right] \quad (7)$$

と書ける。この時刻 $t + \tau$ において、位置と運動量の同時測定結果として平均運動量 p で $x = q$ を中心とする位置の分散 σ^2 の最小波束

$$\psi_{p,q}(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ipx - \frac{(x-q)^2}{4\sigma^2} \right] \quad (8)$$

が得られる場合について考える。

最小波束は、(過剰)完全性関係

$$\int \frac{dpdq}{2\pi} \psi_{p,q}^*(x) \psi_{p,q}(x') = \delta(x - x') \quad (9)$$

を満たしているコヒーレント状態 [3] である。従って、規格化された波動関数 $\Psi_{P,Q}(x)$ に対して、

$$\int \frac{dpdq}{2\pi} \left| \int dx \psi_{p,q}^*(x) \Psi_{P,Q}(x) \right|^2 = 1 \quad (10)$$

を満たすことが分かる。つまり、測定結果として最小波束 $\psi_{p,q}(x)$ が得られる確率密度 $\rho(p, q)$ は

$$\rho(p, q) = \frac{1}{2\pi} \left| \int dx \psi_{p,q}^*(x) \Psi_{P,Q}(x) \right|^2 \quad (11)$$

であり、具体的には

$$\rho(p, q) = \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{3\sigma^4 + |z|^2}} \exp \left(-\sigma^2 \left[(p - P)^2 + \frac{(q - Q - \frac{\tau}{2m}(p + P))^2}{3\sigma^4 + |z|^2} \right] \right) \quad (12)$$

と求まる。

4 遡時予言

前節の結果から、正規分布に関する区間推定に則って、時刻 $t + \tau$ での測定結果として運動量 p ・位置 q の最小波束を得た場合、時刻 t で運動量 P ・位置 Q であった確率密度は、

$$\Phi(P, Q) = \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{3\sigma^4 + |z|^2}} \exp \left(-\sigma^2 \left[(P - p)^2 + \frac{(Q - q + \frac{\tau}{2m}(P + p))^2}{3\sigma^4 + |z|^2} \right] \right) \quad (13)$$

という分布であると考えられる。

これは形式的には、時刻 $t + \tau$ において、運動量 p ・位置 q で位置の分散が σ^2 の最小波束が、自由粒子の Schrödinger 方程式に従って時刻 t まで“時間発展”した場合、その時の“測定結果”として運動量 P ・位置 Q の最小波束を得る確率密度の表式に一致している。

ちなみに、位置だけに着目すると、

$$\rho(q) = \int dp \rho(p, q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi(\sigma^4 + |z|^2)}} \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2(\sigma^4 + |z|^2)} \left[q - Q - \frac{\tau}{m}P \right]^2 \right), \quad (14)$$

$$\Phi(Q) = \int dP \Phi(P, Q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi(\sigma^4 + |z|^2)}} \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2(\sigma^4 + |z|^2)} \left[Q - q + \frac{\tau}{m}p \right]^2 \right) \quad (15)$$

であり、運動量だけでは、

$$\rho(p) = \int dq \rho(p, q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}} \exp \left[-\sigma^2 (p - P)^2 \right], \quad (16)$$

$$\Phi(P) = \int dQ \Phi(P, Q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}} \exp \left[-\sigma^2 (P - p)^2 \right] \quad (17)$$

である。

5 確率解釈

量子論における理論と現実の対応は確率的であるため、その確率の物理的な意味づけについて考察する必要がある。

未来予言の場合の確率は、通常の実験観測の状況下で、次のような頻度確率として理解される：同一視可能な物理系を同じ初期状態にしたものを、時間的あるいは空間的に十分多数用意して、それぞれ同じ理想測定を行なう。結果として得られる状態の頻度分布が、予言した確率分布に漸近する。

これに対して、レトロディクションの場合、単に未来と過去を入れ替えて「同じ現在の測定結果を得る過去の頻度」と考えても、意味付けが明瞭ではない。実験観測の状況設定においては、むしろ事前確率の介入が避けがたく思われる。

ここで我々が提案するのは、通常確率解釈の一種の拡張であり、未来予言に限らず、より広い状況への適用を可能とするものである。そのために、「同じ状態」に限って考える従来の設定を止めて、出発点として確率の値の方に着目する。

例えば、理論によって20%の確率が与えられているあらゆる事象を取り上げよう。この際、どのような物理系のどのような状態に対する測定かについては、必ずしも制限しない。測定結果として（複数の帰結を併せて）20%の確率になる事象は、全て考察の対象とする。その考察の対象に関して、取り上げた事象が実際、測定結果として20%の割合で得られていたら、量子論によるこの20%という言明は正しいと判断するのである。

勿論、どのような物理系のどのような状態か制限して、その特定の範囲で割合を考えてもよい。制限の仕方を、測定結果とは無関係なものにしておきさえすれば、制限しない状況で20%の割合なら、制限してもやはり20%であって、これが通常確率解釈であると理解できる。

逐次的に粒子の位置・運動量を測定する具体例においては、一つ一つの時点でのレトロディクションで同じ確率になる事象を全時間的に集めてみて、その内どれだけの割合がそうになっていたか、測定データと突き合わせてみるができる。量子論の言明が正しいかどうか、このようにして実験的に検証可能と考える。

確率についての以上のような定式化は、頻度確率としての理解を保ちつつも、事象の反復可能性を必ずしも前提としない点において、通常解釈よりも融通が

利かせ易いのではないと思われる。

6 おわりに

この論文では、自由粒子の場合を例にとり、量子論におけるレトロディクションについて考察した。正規分布に関する区間推定に則って、その場合における過去の確率を求めたところ得られた結果は、過去に向かって“時間発展”した際、その時の“測定結果”として、あたかも未来予言であるかのごとく得られる確率の表式に一致していた。

この完全な一致は、自由粒子の場合の事情であって、一般的な結果ではないと思われるが、相互作用があっても、古典近似がよく成り立つ状況においては、近似的に同様なレトロディクションが可能であると推測される。この点については、続編において取り上げるべき課題である。

また、量子論における確率解釈についても、頻度確率としての解釈を保ちつつレトロディクションの場合にも通用する形に拡張を試みた。この拡張は、レトロディクションに限らず、例えば宇宙全体に関する様な単一事象の確率解釈などに対しての応用も可能なのではないかと考える。

謝 辞

本研究の端緒は徳島大学素粒子論研究室におけるセミナーにあります。主催した日置善郎教授をはじめ、参加メンバーとの議論に感謝します。

文 献

- [1] S. Watanabe, Rev. Mod. Phys. **27** (1955) 179.
- [2] 例えば、A. Holevo, “Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory,” (2011) Edizioni della Normale.
- [3] J.R. Klauder and B.S. Skagerstam, “Coherent States,” (1985) World Scientific.

論文受付：2017年 8月 17日

論文受理：2017年 10月 20日