研究ノート

Wythoffの石取りゲームとRayleighの定理

片 山 真 一*，久 保 智 哉**

1．石取りゲームとニム和

石取りゲームとは，Nim（ニム）ともよばれ，いくつかの石の山から二人のプレーヤーが交互に石を取り合って最後に全部の石を取ったプレーヤーが勝者となるゲームである．このルールの場合を**正規形のゲーム**と言う．逆に最後に石を取らされた方を敗者とする**逆形のゲーム**もあるが，以下で取り上げるのは，正規形の石取りゲームである．実は，各回で取る石の数に制限を付けず，先手，後手が，共に最善手を取るという仮定の下では，最初の石の数と山の数で先手必勝形であるか後手必勝形であるかが決まってしまう．またその場合の後手必勝形は，下記で述べるように，非負整数全体$\mathbb{N}_0$に2進表示を用いて入る**Nim和**（ニム和）と呼ばれる加法群の構造を用いて記述できる．

一山の場合には，石が一つも無い場合は，終了形なので後手必勝形と見なす．それ以外の全ての場合は先手必勝形になる．二山崩し(m, n)（各山の石の数が(m, n)）については，数が小さい場合に試してみれば，後手必勝形は，$(m, n)=(0, 0), (1, 1), \cdots\cdots, (k, k), \cdots\cdots$となっていることを帰納的に示すことができる．

三つ山以上に一般化するために，$\mathbb{N}_0$を非負整数全体とするとき，Nim和$\oplus$を次の様に定義する．

$m, n \in \mathbb{N}_0$の2進展開を（展開の桁を合せて）次のように表しておく．

$$m = a_d \times 2^d + a_{d-1} \times 2^{d-1} + \cdots\cdots + a_1 \times 2 + a_0 \ (a_i \in 0,1)$$
$$n = b_d \times 2^d + b_{d-1} \times 2^{d-1} + \cdots\cdots + b_1 \times 2 + b_0 \ (b_i \in 0,1)$$

ここでa, bの2進表記の桁が違う場合も，$a = 7 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$，$b = 3 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$のように$0 \times 2^n$を加えて同じ桁に揃えておく．次に各係数$a_i$, b_jを2元体$\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$の元と考える．即ち$0+0=1+1=0$, $1+0=0+1=1$として，$c_i = a_i + b_i \ (0 \leq i \leq d)$とする．

このとき$m, n \in \mathbb{N}_0$のNim和$m \oplus n \in \mathbb{N}_0$を，

$$m \oplus n = c_d \times 2^d + c_{d-1} \times 2^{d-1} + \cdots\cdots + c_2 \times 2^2 + c_1 \times 2 + c_0$$

と定義する．例えば$a=7$, $b=3$の場合には，$7 \oplus 3 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 2^2 = 4$となる．この記号を用いれば，$n$山の局面$P = (m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n)$が後手必勝形であるための必要十分条件は，下記の通りである．

$$m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots\cdots \oplus m_n = 0$$

一方，Nim和が0以外の値をとれば，局面Pは，先手必勝形である．

このような形の石取りゲームにニムという名前を付けて後手必勝形について2進法を用いた解析を行ったのは，1901年のC. L. Bouton（バウトン）の文献［4］である．Boutonは，この論文の序文でニムのルーツは中国のギャンブル番攤（ファンタン）であると述べているが，現在の番攤のルールは一つの石の山から石を取るという部分が共通なだけで，かなり異なるゲームである．ここでは，Boutonの記述にある西欧で完成した基本ルールに基づく石取りゲームを扱うことにする．

一方日本に於いては，深沢（森本）清吾が，ゲームのルールを伝聞し，1922年に『一ツノ数學遊戯』という題名でTohoku Math. J. 21に於いて，独自に2進法を用いて三つ山崩しの後手必勝形の決定を行ったのが，筆者の知る限り最初の記述である．深沢は，1921年に浦和の埼玉師範学校の教諭をしているときにこの論文を書き，東北大学教授であった林鶴一に認められて翌年10月に東北数学雑誌に掲載され，さらに1923年に東北帝国大学助手として採用された．深沢は，その後東北大学学生であった森本治江と結婚し，森本清吾と改名した．東北大学でその当時盛んに研究されていた卵形曲線についてもいくつか論文を発表したが，林鶴一の森本治江との結婚への反対[1]もあって，東京理大へ転出した．

＊徳島大学理工学部
＊＊徳島大学院総合科学教育部

[1] 東北大学物理学教授でありアララギ派の歌人でもあった石原純が起こした恋愛（不倫）事件とその辞職が林鶴一の脳裏にはあったのかも知れない．

その頃からは，森本(深沢)独自の研究分野であるDiophantus近似論やポリアの整数値多項式の特徴づけの2次体上の関数への一般化など主として整数論の分野で多くの研究成果を発表している．参考のためにTable 1として深沢の論文のp267の表を少し記号を換えて転載しておこう．この表は，横にm，縦にnを取り，(m, n)の場所に，二つの石の山が(m, n)のときに三つ山(m, n, ℓ)が後手必勝形となるℓ（定義によりℓは，(m, n)に対してただ一通りに決まる）を置いたものである．ここでブロックAは，$0 \leq m, n \leq 2^k - 1$の部分とする．このとき$0 \leq m \leq 2^k - 1$, $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$，および$0 \leq n \leq 2^k - 1$, $2^k \leq m \leq 2^{k+1} - 1$の部分には$B = 2^k + A$が入り，$2^k \leq m, n \leq 2^{k+1} - 1$の部分には$A$が入っている．論文中で深沢自身は，Nim和の群構造には言及していない．しかしながら，深沢が表の形で明示したアルゴリズムは，上で説明したNim和の群構造と本質的に同等である．このアルゴリズムを繰り返し適用して得られたℓの具体的な数値を書いた表Table 2も参考のため転載する．

Table 1 (Tohoku Math. J. 21, p267)

$m \backslash n$	$0 \cdots\cdots 2^k - 1$	$2^k \cdots\cdots 2^{k+1} - 1$
$0 \vdots 2^k - 1$	A	B
$2^k \vdots 2^{k+1} - 1$	B	A

Table 2 (Tohoku Math. J. 21, p270の一部
(元の表は$0 \leq m, n \leq 31$の範囲まで記載)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

2．Wythoffの二山崩し

Wythoff（ワイトホフ）の石取りゲームとは，二山崩しに於いて，一つの山から石を石を取るだけでなく二つの山から同時に同じ数の石を取ることも許したゲームである．この手順を許すことによって通常のルールの二山崩しの後手必勝形(m, m)が後手必勝形ではなくなる所にこの石取りゲームの面白みがある．Wythoffの石取りゲームの局面$P = (m, n)$のグランディー数を$g(m, n)$とする．$g(0, 0) = 0$から帰納的に$g(m, n)$を具体的に求めることは可能であるが，$g(m, n)$をm, nで明示的に表す閉じた式の存在の有無は，今現在も知られていない未解決な問題である．しかし後手必勝形すなわち$g(m, n) = 0$となる(m, n)を求めることは可能であり，次のようにWythoff (1905)が美しい結果を得ている．

Theorem 2. 1 (Wythoff [30] 1905)

m_sを漸化式$m_0 = 0$, $m_{s+1} = mex\{m_0, m_1, m_1 + 1, \cdots\cdots, m_s, m_s + s\}$で定める．このとき後手必勝形は$g(m, n) = 0 \iff (m, n) = (m_s, m_s + s)$または$(m_s + s, m_s)$．ここで$mex$は，次のセクションで定義される最小除外数で，$m_s$は，ガウス記号$[x]$黄金比$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$を用いて$m_s = [s\phi]$で与えられている．

Remark 2. 2

上記の定理の証明には，後述するJ. W. S. Rayleigh（レイリー）『The Theory of Sound』([22] 1894)に記載された定理が用いられる．

Wythoffの石取りゲームのグランディー数$g(n)$に関しては，上で述べたように明示的な式は未だ知られていないものの，次のような定性的な性質が得られている．

Theorem 2. 3

(Dress, Flammenkamp, Pink [5] 1999)

mを固定したとき，Wythoffの石取りゲームのグランディー数$g(m, n)$は加法的周期性を持つ．すなわち，ある$a_m \geq 0$, $p_m > 0$があって

$$n \geq a_m \Rightarrow g(m, n + p_m) = g(m, n) + p_m$$

が成立する．(注：この場合は周期＝増分＝p_m)

Table 3. (m, n)が小さい場合の$g(m, n)$の表
(注：対称性$g(m, n) = g(n, m)$に留意)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	0	1	2	3	4	5	6	7	…
1	1	2	0	4	5	3	7	8	…
2	2	0	1	5	3	4	8	6	…
3	3	4	5	6	2	0	1	9	…
4	4	5	3	2	7	6	9	0	…
5	5	3	4	0	6	8	10	1	…
6	6	7	8	1	9	10	3	4	…
7	7	8	6	9	0	1	4	5	…
8	8	6	7	10	1	2	5	3	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋰	…

Table 4. $g(m, n)$の加法的周期表(p_mおよびa_m),
(Dress, Flammenkamp, Pink [5] 1999)より)

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_m	1	3	3	6	12	24	12	24	24
a_m	0	0	0	8	9	27	37	92	102

9	10	11	12	13	14	15	16
24	24	48	48	96	96	96	24
127	224	227	347	382	613	693	771

17	18	19	20	21……43
192	384	384	384	768
865	919	1032	1165	1252……13849

44……67	68……70	71……90
1536	3072	6144
14190……51898	53873……58059	60650……126851

3．制限付きの石取りゲーム

制限を付けた場合の石取りゲームの後手必勝形(先手必勝形)の決定には，それぞれの局面の状態を表す**Grundy 数**(グランディー数)というものを定義しておくと便利である．ある局面Pから1手で移行可能な局面P'をPの**後続局面**と呼んで，

$$P \to P'$$

と表すことにする．次に$T \subset \mathbb{N}$(この場合$\mathbb{N}$は自然数全体)のときに

$$mex(T) = min(\mathbb{N} - T)$$

として，集合Tの**最小除外数**と呼ぶ．終了局面全体をεとし，終了局面$P \in \varepsilon$のグランディー数$g(P)$を$g(P) = 0$とする．以下$N(P)$でPの後続局面全体の集合とし，

$$g(P) = mex(g(N(P))$$

と帰納的に定めておく．

$S \subset \mathbb{N}$とする．制限付きの一山崩しとは，山から取り去ることができる石の数sが$s \in S$に限られることを言う．この制限された石取りゲームの局面Pのグランディー数を$gs(P)$で表すとき，制限無しの場合と同様に次の2条件は，同値である．

$$gs(P) = mex\ (gs(N(P)) = 0 \Leftrightarrow \text{局面}P\text{は後手必勝形}$$

この定義に従えば，制限無しの一山崩しの場合の，局面$P = n$のグランディー数は，$g(n) = n$であることが分かる．

以下では，$S = \{s_1, s_2, \cdots\cdots, s_r\}$，$0 < s_1 < s_2 < \cdots\cdots < s_r$と仮定する．この有限集合$S$に対し，局面$P = n$の後続局面全体の集合$N(n)$は，$N(n) = \{n - s \mid n - s \geq 0\ (s \in S)\}$であり

$$g(n) = mex\{n - s \mid n - s \geq 0\ (s \in S)\}$$

となって，次の定理が成立する．

Theorem 3. 1

グランディー数列$\{gs(n)\}$は**周期的**である．すなわちある$a \geq 0, p > 0$に対して次が成立する．

$$n \geq a \Rightarrow gs(n + p) = gs(n)$$

(注：このpが，グランディー数列$\{gs(n)\}$ の**周期**)

また有限集合$S\{s_1, s_2, \cdots\cdots, s_r\}$が与えられたとき，実際に周期$p$と$a$を求める場合には，次の定理が有用である．

Theorem 3. 2

ある$a \geq 0, p > 0$があって，$a \leq n \leq a + s_r - 1$の$s_r$個の$n$に対して$gs(n + p) = gs(n)$が成立するとき，

$$n \geq a \Rightarrow gs(n + p) = gs(n)$$

この定理を$S = \{1, 2, \cdots\cdots, k\}$ に適用して次を得る．

Example 3. 3

$S = \{1, 2, \cdots\cdots, k\} \Rightarrow$ 次が成立する．$\{gs(n)\} = \{0, 1, 2, \cdots\cdots, k, 0, 1, 2, \cdots\cdots, k, \cdots\cdots\}$すなわち$a = 0, p = k +$

1, $gs(n) \equiv n \bmod (k+1)$.

またSが$S = \mathbb{N} - T\ (|T| < \infty)$の場合には，グランディー数列$\{gs(n)\}$が，**加法的周期性**と呼ばれる次の性質を満たす事が知られている.

Theorem 3.4

ある$a \geq 0, p > 0, q > 0$に対して

$$n \geq a \Longrightarrow gs(n+p) = gs(n) + q$$

このとき，pを**周期**，qを**増分**と言う.

Example 3.5

$T = \{1, 2, \cdots\cdots, k\}$, $S = \mathbb{N} - T$の時，$\{gs(n)\}$は，加法的周期性を持ち$a = 0, p = k+1, q = 1$である．すなわち$gs(n) = \left[\frac{n}{k+1}\right]$と表される.

注)ここで実数xに対して，$[x]$はxを超えない最大の整数を表わすガウス記号である.

4．制限付きのWythoffニム

このセクションでは，[15]，[16]で発表した取る石の数に制限を付けたときのWythoffの石取りゲームのグランディー数の満たす性質の結果(久保智哉氏との共同研究)を紹介する．まず一つ目の山からとれる石の数を$S_1 = \{s_{1,1}, s_{1,2}, \cdots\cdots, s_{1,r(1)} | 0 < s_{1,1} < s_{1,2} < \cdots\cdots < s_{1,r(1)}\}$とする．また二つ目の山からとれる石の数を$S_2 = \{s_{2,1}, s_{2,2}, \cdots\cdots, s_{2,r(2)} | 0 < s_{2,1} < s_{2,2} < \cdots\cdots < s_{2,r(2)}\}$とし，二つの山から同時にとれる石の数を$S_3 = \{s_{3,1}, s_{3,2}, \cdots\cdots, s_{3,r(3)} | 0 < s_{3,1} < s_{3,2} < \cdots\cdots < s_{3,r(3)}\}$とする．$S = (S_1, S_2, S_3)$と制限したWythoffの石取りゲームのグランディー数を$gs(m,n)$とする．$gs(m,n)$は，次の性質を満たす.

Theorem 4.1(片山，久保 [16] 2018)

上記の記号の下で，mを固定する．取る石の数に制限を付けたWythoffの石取りゲームのグランディー数$gs(m, n)$は周期性を持つ．すなわち，ある$a_m \geq 0, p_m > 0$があって次式が成立する.

$$n \geq a_m \Rightarrow gs(m, n+p_m) = gs(m, n)$$

Remark 4.2

上記の定理でmを固定し，二山(m, n)から取る石の数をnの山だけに有限のパターンの制限を付けたWythoffの石取りゲームのグランディー数$gs(m, n)$は，同様に周期性を持つことが示せる.

ここで，関連した結果をいくつか紹介しておく．$S_1 = S_2 = \mathbb{N}$で，ある正の数pに対して，二山から同時に取る石の数を(x, y), $0 \leq x+y \leq p-1$とした場合は，一般化された**竜王ニム**と名づけられていて，次のような結果が得られている．また，さらに一般化した竜王ニムについても，福井正則氏および末續鴻輝氏によって考察が加えられている.

Theorem 4.3 (戸國 [26] 2018)

一般化された竜王ニムのグランディー数$gs(m, n)$は次のように表せる.

$$gs(m, n) = m + n - p\left[\frac{m+n}{p}\right] + p\left(\left[\frac{m}{p}\right] \oplus \left[\frac{n}{p}\right]\right)$$

Remark 4.4

通常のWythoffのニムでの(m, n)の山は，格子盤の(m, n)の格子点に置いたチェスのクイーン(動きを左と下および左斜め下に制限)を2人のプレーヤーが交互に移動させて，最後に左下のコーナー(0, 0)に移動させたプレーヤーが勝者という*Corner the Queen Game*[2)]に言い換えることができる．竜王ニムは，クイーンの代わりに将棋の竜王を取った場合を考え，駒の動きをさらに一般化したものである．なお次に誰でも考える竜馬ニムについて，基礎的な通常の竜馬の場合に，Table 6を記載して置く．各行並びに列については，周期2の周期性を持ち，対角線方向は，周期4，増分4の加法的周期性を持つことが容易にわかるが，今の所良い一般化の方向性は得られていないようである.

ここで述べたことが確認できる通常の竜王ニムおよび竜馬ニムのグランディー数の(m, n)が小さい場合の表(注：[10]，[17]，[24] 参照)を作成しておく.

Table 5. (m, n)が小さい場合の竜王ニム(Theorem 4.2で$p = 3$と置いた場合(即ち$S = (\mathbb{N}, \mathbb{N}, \{1\})$)の場合)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1

2) M. Gardner [6] によれば，R. T. Isaacsによって1962年に導入されたゲームである.

Table 6. (m, n)が小さい場合の竜馬ニム(即ち$S = (\{1\}, \{1\}, \mathbb{N}))$の場合)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	2	3	2	3	2	3	2	3
2	0	3	1	0	1	0	1	0	1
3	1	2	0	3	2	3	2	3	2
4	0	3	1	2	4	5	4	5	4
5	1	2	0	3	5	6	7	6	7
6	0	3	1	2	4	7	5	4	5
7	1	2	0	3	5	6	4	7	6
8	0	3	1	2	4	7	5	6	8

以下で，Theorem 4.1の証明を行う．

まず$gs(m, n)$は，$0 \leq gs(m, n) \leq r(1) + r(2) + r(3)$(Remark 4.2の場合は$\leq 2m + r(2)$)と有限の値しか取り得ない．$m = 0$の時は，制限付きの一山崩しの場合に帰着するので正しいことが分かる．以下mに関する帰納法によって次のように証明できる．$m'(0 \leq m' \leq m-1)$のときは，$gs(m', n + p_{m'}) = g(m', n)$が，ある$a_{m'}$以降の$n \geq a_{m'}$で成立すると仮定し，それぞれの周期を$p_0, p_1, \cdots\cdots, p_{m-1}$とする．ここで$a_* = max\{a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{m-1}\}$，$p_* = LCM(p_0, p_1, \cdots\cdots, p_{m-1})$とする．このときある$p = p_m$ (ただし$p_* | p_m$があってこの定理が成立することが，次のように鳩ノ巣原理を用いて示せる．以下$s_2 = s_{2, r(2)}$と略記する．nの山に関する連続するs_2個のグランディー数$gs(m, n)$のパターンは，高々$\ell_* = (r(1) + r(2) + r(3) + 1)^{s_2}$個なので

$$
\begin{aligned}
&(gs(m, a_*), gs(m, a_*+1), \cdots\cdots, gs(m, a_*+s_2-1)),\\
&(gs(m, a_*+p_*), gs(m, a_*+p_*+1), \cdots\cdots,\\
&gs(m, a_*+p_*+s_2-1)),\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&(gs(m, a_*+\ell_* p_*), gs(m, a_*+\ell_* p_*+1), \cdots\cdots,\\
&gs(m, a_*+\ell_* p_*+s_2-1))
\end{aligned}
$$

と$\ell_* + 1 = (r(1) + r(2) + r(3) + 1)^{s_2} + 1$個の組を考えると，鳩ノ巣原理により，ある$\ell_i$, ℓ_j $(0 \leq \ell_i < \ell_j \leq \ell_*)$が存在して次が成立する．

$$
\begin{aligned}
&(gs(m, a_*+\ell_i p_*), gs(m, a_*+\ell_i p_*+1), \cdots\cdots,\\
&gs(m, a_*+\ell_i p_*+s_2-1))\\
&= (gs(m, a_*+\ell_j p_*), gs(m, a_*+\ell_j p_*+1), \cdots\cdots,\\
&gs(m, a_*+\ell_j p_*+s_2-1))
\end{aligned}
$$

ここで$a = a_* + p_* \ell_i$とし$p = p_*(\ell_j - \ell_i)$とおくと，上の条件から

$$
\begin{cases}
gs(m, a) = gs(m, a+p),\\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
gs(m, a+s_2-1) = gs(m, a+s_2-1+p)
\end{cases}
$$

と連続するs_2個については周期pを持つことが分かる．$n \geq a + s_2$の場合も周期pを持つことを示すために，nより小さな任意の$n'(a \leq n' < n)$では$gs(m, n') = gs(m, n'+p)$と仮定する．このとき$n - s_j \geq a$, $n - s_k \geq a$なので次が成立する．

$$
\begin{aligned}
&gs(m, n+p)\\
&= mex\{gs(m-s_i, n+p),\ gs(m, n+p-s_j),\\
&\quad gs(m-s_k, n+p-s_k) \mid 0 \leq m-s_i,\\
&\quad 0 \leq m-s_k,\ s_i, s_j, s_k \in S\}\\
&= mex\{gs(m-s_i, n),\ gs(m, n-s_j),\ gs(m-s_k,\\
&\quad n-s_k) \mid 0 \leq m-s_i,\ 0 \leq m-s_k, s_i, s_j, s_k \in S\}\\
&= gs(m, n).
\end{aligned}
$$

以上により$n \geq a \Rightarrow gs(m, n+p) = gs(m, n)$が成立し帰納法が完成する．

Remark 4.5

上記の証明で得られる$p = p_m$は，任意の$m'(0 \leq m' < m)$に対して$p_{m'} | p_m$という条件を付けて得られている．従って周期p_mはmの増加によって非常に早く大きくなるように思われるが，具体的な場合を試算するともっと周期が短い事が多い．p_mがmによらず有界であるようなある十分条件の一つが得られているが，ここでは詳細には言及しない．

以下，Sが具体的な場合について，$S = (\{1\}, \{1\}, \{1\})$のときと$S = (\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 2\})$のときの$gs(m, n)$の表を掲載しておく．

Table 7. ($S = (\{1\}, \{1\}, \{1\})$の場合)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	2	3	2	3	2	3
2	0	3	0	1	0	1	0
3	1	2	1	2	3	2	3

この場合は，周期$p = 2$で各$a_m = m$が成立している．また対角線と平行なライン上の(m, n)の値は，周期2を持ち$gs(m, +2, n+2) = gs(m, n)$が$m, n \geq 0$

で成立している．

Table 8（$S=(\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 2\})$ の場合）

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	1	2	0	1	2	0	1	2	0
2	2	0	1	2	0	1	2	0	1
3	0	1	2	0	1	2	0	1	2
4	1	2	0	1	2	0	1	2	0
5	2	0	1	2	0	1	2	0	1

この場合は，取る石の数に制限のない Whthoff のゲームのグランディー数 $g(m, n)$ との間に $gs(m, n) \equiv g(m, n) \pmod 3$ と言う特殊な関係が成立しており，m によらず $a=0, p=3$ と純周期的になっている．この場合も対角線と平行なライン上の (m, n) に関して同じ周期3を持ち $gs(m, +3, n+3) = gs(m, n)$ が $m, n \geq 0$ で成立している．ただし $S=\{1, 2, \cdots\cdots, k\}$，$k=3, 4$ の場合では，このような関係は成立していない．

5．$S \subset \mathbb{N}$ の同値類

$S, S' \subset \mathbb{N}$ が $S \sim S'$ と言う**同値条件**[3] を制限付きの石取りゲームのグランディー数を用いて

$$S \sim S' \Longleftrightarrow gs(k) = gs'(k)\ (\text{任意の } k \in \mathbb{N}_0)$$

で定める．

このとき n 山 $(m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n)$ に対する制限 $S = (S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n)$ を，各山 m_k からとれる石 s を $s \in S_k$ に限るとして定める．このとき $S = (S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n)$，$S' = (S'_1, S'_2, \cdots\cdots, S'_n)$ の同値 $S \sim S'$ を，任意の $k_i \in \mathbb{N}_0\ (1 \leq i \leq n)$ に対し

$$S \sim S' \Longleftrightarrow gs(k_1, k_2, \cdots\cdots, kn) = gs'(k_1, k_2, \cdots\cdots, kn))$$

で定めると，次の同値性がニム和を用いて容易に示せる．

$$S \sim S' \Longleftrightarrow S_i \sim S'_i\ (1 \leq i \leq n)$$

Example 5.1

$S=\{1\}$ とするとき，$gs(n) = 0.1, 0, 1, \cdots\cdots$ と周期2で純周期的なグランディー数列となる．また同値類の条件は

$$S \sim S' \Longleftrightarrow$$
$$S = \{1\} \subset S' \subset \{1, 3, 5, \cdots\cdots, 2n+1, \cdots\cdots\}$$
$$= \text{奇数全体} = \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$$

Example 5.2

k を自然数とする．$S = k\mathbb{N}$ とおくと，グランディー数列は，

$gs(n) = 0.0, \cdots\cdots, 0, 1, 1, \cdots\cdots, 1, 2, 2, \cdots\cdots, 2, \cdots\cdots$ と 0 から同じ数字が $k+1$ 個ずつ続く周期 $k+1$，増分1の加法的周期性を持ち，同値性について次が成立する．

$$S \sim S' \Longleftrightarrow S = k\mathbb{N} \subset S' \subset \mathbb{N} - \{1, 2, \cdots\cdots, k-1\}$$

ここで，同値類に関する結果についても少し触れておこう．以下の表は，周期 p が2から6で純周期的なグランディー数列を持つ S の同値類を全て決定したものである．この表は，山脇弘樹君の2018年の卒業研究での成果［29］の一部である．

Table 9

p	数列	S の同値類
2	$\dot{0}.\dot{1}$	$\{1\} \subset S \subset \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$
3	$\dot{0}.1\dot{2}$	$\{1, 2\} \subset S \subset \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$
4	$\dot{0}.10\dot{1}$	$\{1\} \subset S \subset \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$
	$\dot{0}.01\dot{1}$	$\{2\} \subset S \subset 2\mathbb{N} - 4\mathbb{N}$
	$\dot{0}.12\dot{3}$	$\{1, 2, 3\} \subset S \subset \mathbb{N} - 4\mathbb{N}$
5	$\dot{0}.011\dot{2}$	$\{2, 3\} \subset S \subset \{n \mid n \equiv 2, 3 \pmod 5\}$
	$\dot{0}.101\dot{2}$	$\{1, 4\} \subset S \subset \{n \mid n \equiv 1, 4 \pmod 5\}$
	$\dot{0}.123\dot{4}$	$\{1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{N} - 5\mathbb{N}$
6	$\dot{0}.1010\dot{1}$	$\{1\} \subset S \subset \mathbb{N} - 2\mathbb{N}$
	$\dot{0}.0011\dot{1}$	$\{3\} \subset S \subset 3\mathbb{N} - 6\mathbb{N}$
	$\dot{0}.1201\dot{2}$	$\{1, 2\} \subset S \subset \mathbb{N} - 3\mathbb{N}$
	$\dot{0}.0112\dot{2}$	$\{2, 4\} \subset S \subset \{n \mid n \equiv 2, 3, 4 \pmod 6\}$
	$\dot{0}.1234\dot{5}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{N} - 6\mathbb{N}$

上の表でグランディー数列 $\dot{a}_0, a_1 a_2 \cdots\cdots \dot{a}_n$ は，循環小数の表記法を借りたものでグランディー数列が，数値 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ と $n+1$ 個を周期 $n+1$ で繰り返して，純周期的であることを表わす．これらの同値類の同値性は，左で述べたように石の山が増えても保たれる．

一方で，制限付きの Wythoff の石取りゲームでは，$S \sim S'$ でも $gs(m, n) \neq gs'(m, n)$ となることがある例がある．以下に2つの例を挙げておく．まず $S = 2\mathbb{N}$

[3] この同値の概念は，一松氏の［11］でも考察されている．

のときと$S'=\mathbb{N}-\{1\}$の場合のグランディー数$gs(m,n)$, $gs'(m,n)$の表の最初の部分だけを掲載しておく.

Table 10-1 ($S=2\mathbb{N}$の場合)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	0	0	1	1	2	2	3	3	…
1	0	0	1	1	2	2	3	3	…
2	1	1	2	2	0	0	4	4	…
3	1	1	2	2	0	0	4	4	…
4	2	2	0	0	1	1	5	5	…
5	2	2	0	0	1	1	5	5	…

Table 10-2 ($S'=\mathbb{N}-\{1\}$の場合)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	0	0	1	1	2	2	3	3	…
1	0	0	1	1	2	2	3	3	…
2	1	1	2	2	0	0	4	4	…
3	1	1	2	2	3	0	0	4	…
4	2	2	0	3	1	4	5	5	…
5	2	2	0	0	4	1	5	5	…

この場合, $S \sim S'$であるが$gs(3,4)=0$, $gs'(3,4)=3$となり異なる値を取る(m, n)の組が存在することが分かる. これは同値性$S \sim S'$が制限付きのワイトホフの石取りゲームのグランディー数では, 保たれないことを示している.

Table 11-1 ($S=(\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,3\})$の場合)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	0	1	2	3
1	1	2	0	4	1	2	0	4
2	2	0	1	5	3	0	1	2
3	3	4	5	6	2	7	4	5

Table 11-2 ($S'=(\{1,2,3\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3\})$の場合)

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	0	1	2	3
1	1	2	0	4	1	2	0	4
2	2	0	1	5	3	0	1	2
3	3	4	5	6	2	7	4	6

この場合も, $S \sim S'$であるが$gs(3,7)=5$, $gs'(3,7)=6$となり異なる値を取る(m, n)の組が存在することが分かる.

6. レイリーの定理

Wythoffの二山崩しでの後手必勝形に関するレイリーの結果は, 著書『The Theory of Sound』の第1巻(1894年の第2版 [22] のp122からp123)で端点を固定した弦の$(1/a, 1/b)$の内分点を固定して弾いた2つの弦が決して共振を起こさない条件として考察されている. 実は, レイリーの定理がレイリーのものとして明示されている日本語のテキストは, 筆者の知る限り中村滋氏の『フィボナッチ数の小宇宙』([20] 2002)と佐藤文広氏の『石取りゲームの数学―ゲームと代数の不思議な関係』([23] 2014)で, それまでの一松氏 [11], 秋山氏 [1] では, ヴィノグラドフの定理と紹介されている. その原因のひとつと考えられるのは, 土方弘明氏が1959年に [9] で, 松田道雄氏の『パズルと数学』(1958年)でのワイトホフの石取りゲームの紹介記事を見て証明を与えたことに一因がある. 土方氏は, その中でワイトホフの石取りゲームの必勝形を与える証明にレイリーの定理(I. M. Vinogradoffの独訳版の定理(共立出版の日本語訳 [28] の第2章の問題3の命題))を用いた簡易化された別証明を与えている. ただしその命題が物理学者のレイリー卿によって最初に与えられたものであることには言及していない.

ここで挙げたレイリーは, 古典物理学の大家J. W. S. Rayleigh (レイリー)卿で, 光の散乱の研究から空が青くなる理由を示す(レイリー散乱), 地震の表面波(レイリー波)の発見, 熱放射を古典的に扱ったレイリー・ジーンズの法則の発見などで知られている. また1904年に「気体の密度に関する研究, およびこの研究により成されたアルゴンの発見」によりノーベル物理学賞を受賞している. ここでレイリー散乱とは, 光の波長よりも小さいサイズの粒子による光の散乱で, 太陽光が大気で散乱されることによって, 空が青く見える現象[4]が典型的なものである. 寺田寅彦がレイリーの『The Theory of Sound』を読んで強い影響を受けたことは, 小伝記『レーリー卿(Lord Rayleigh)』で書いた通りであるが, 『The Theory of Sound』第1版は, 下記のような状況で書かれた物らしい. 寺田寅彦のエッセイの文章の該当箇所を転載しておこう.

「一八七二年正月ケント州のBedgebury の親戚の宅で泊っているうちに劇烈な熱病(rheumatic fever)に

4) Pesicの『青の物理学』[21] を参照

罹り，一事は心許ない容態であった．関節と肺とを冒されたのであった．幸いに治癒したが，急に年を取ったように見えた．Toftsの新居に実験室を造ろうと考えてマクスウェルの知慧を借りたりしたが，結局ここにはわずかに四箇月くらいしか居ないことになった．ここでは主に廻折格子を写真で複製する実験をやったのである．後年この家の後継者はこの実験室を玉突き室に改造したそうである．病後の冬の寒さを避けるためにエジプト旅行に出掛けた．夫人の姉エリーノアも同道した．その頃はまだ珍しかったスエズ運河を見，蜃気楼に欺されたりして，カイロに着き，そこから小船に乗ってナイル河を遡さかのぼった．南京虫や蚤蚊に攻められながら，野羊の乳を飲み，アラビア人のコックの料理を食って，一八七二年の十二月十二日から翌年三月中旬にわたる単調な船住いをつづけた．この退屈な時間を利用して彼はその名著Theory of Soundの草稿を書いていた．午前中は大抵キャビンに籠ってこの仕事に没頭していた.」この記述には，寺田寅彦のレイリー卿への共感[5)]が良く現れている部分でもあり長々と引用した．引用部分から分かるように『The Theory of Sound』の第1版[6)]は，周りに十分な設備や文献の無い中で執筆され，レイリー卿の中で十分に熟していた内容を書いた物だった．後に手を加えた第2版［22］p123で弦の共振に関する条件$1/a+1/b=1$, $b/a \notin \mathbb{Q}$が$I=\{[a],[b]\,[2a],[2b],\cdots\cdots,[na],[nb],\cdots\cdots\}$の中に全ての自然数がただ1回現れるという現象を導く事実が証明なしに記載されている．現在は，レイリーの定理は，次の様に整理されている．

Theorem 6.1（レイリーの定理）（[2], [3], [9], [11], [20], [28]）

$I=\{[a],[b]\,[2a],[2b],\cdots\cdots,[na],[nb],\cdots\cdots\}$の中に全ての自然数がただ1回現れる．

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\ (a,b>0,\ a\text{は無理数})$$

注）黄金比$(1+\sqrt{5})/2$は，レイリーの定理で$b=a+1$と置いてaに関する2次方程式を解いて得られる．

日本でのレイリーの定理に関する記述の混乱については，上で述べた通りであるが，レイリーのこの結果自体，中々浸透せず何回も再発見されている．中でもS. Beattyが，American Mathematical Monthly 33（1926年）に問題3173として提出し，34巻でA. Ostowski, J. HyslopとA. C. Aitkenによって独立に証明が与えられたことは著名であり，上記のレイリーの定理をBeatty（ビーティー）の定理と読んでいる文献も存在する．正の無理数αに対して$I(\alpha)=\{[n\alpha]\mid n\in\mathbb{N}\}$をBeatty（ビーティー）数列と言う．$N-J$をBeatty（ビーティー）数列とする$\beta$がレイリーの定理の条件$1/\alpha+1/\beta=1$をみたす$\beta$であり，$\{[n\beta]\mid n\in\mathbb{N}\}$を$I(\alpha)$の相補対と言い，特に$\alpha=\phi$の場合の相補対は，ワイトホフ（ワイソフ）対と呼ばれている．レイリーの定理の状況は次のように特殊である．

もし$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_k$の$k$個のビーティー数列$I(\alpha_1), I(\alpha_2), \cdots\cdots, I(\alpha_k)$がもれなく重複も無く自然数$\mathbb{N}$を覆うとする．実はこのような$k$は，$k=2$の時に限ること，すなわちレイリーの定理の場合に限ることが，1927年に論文［27］でUspenskyによって証明されている．

なお日本での石取りゲームとして，佐藤幹夫氏により石取りゲームの一種であるコインゲームの「マヤゲーム」と呼ばれるゲームの理論が展開されている．これは西欧では，C. P. Welterによって1954年に発表されたのでウォルターのゲームとして知られている．Welterのゲームの欧米での初出は，「C. P. Welter, The advancing operation in a special abelian group, Indagationes Math. 14（1952）, 304-314」および「The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of the advancing operation in a special abelian group, Indagationes Math., 16（1954）, 194-200」である．このゲームに関しては，佐藤幹夫氏によって「マヤゲーム」と言う名前で独自に（おそらくWelterより先行して）理論が作られた．しかしながら佐藤先生のことなので，論文としては，残っておらず，講演録の形[7)]で残されている．

せっかくなのでレイリーの定理の証明を紹介しておこう．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\ (a,b>0,\ a$は無理数)が必要条件であることは，ビーティー数列$I(a)=\{[na]\mid n\in\mathbb{N}\}$と$I(b)=\{[nb]\mid n\in\mathbb{N}\}$のそれぞれに含まれる1から$n$までの数の数を$C(a)$, $C(b)$とおくと$C(a)=[n/a]$, $C(b)=[n/b]$であり，$n=C(a)+C(b)$と$C(a)<n/n<C(a)+1$, $C(b)<n/b<C(b)+1$より$n<n(1/a+1/b)<n+2$で辺々をnで割って，$n\to\infty$と

5）レイリー卿と寺田寅彦の関係についての一つの考察は，小山慶太［15］を参照．

6）1877年の第1版にはレイリーの定理の記述は無い．

7）佐藤幹夫，あるゲームについて，第12回代数分科会シンポジウム集，1968, pp.123-136, 榎本彦衛，Maya Gameについて（佐藤幹夫氏講義の記録），「数学の歩み」15-1, pp.73-84, 榎本彦衛，マヤゲームの数学的理論（佐藤幹夫氏講演），数理解析講究録98（1970），105-135. を参照のこと．

極限を取って$1/a+1/b=1$を得る．この条件のもとで$a\in\mathbb{Q}^{\times}\Longleftrightarrow b/a\in\mathbb{Q}^{\times}$とすると，$b/a=p/q$と分数で表せて$[pa]=[qb]\in I(a)\cap I(b)$と矛盾が生ずる．従って

「$I=\{[a],[b][2a],[2b],\cdots\cdots,[na],[nb],\cdots\cdots\}$の中には全ての自然数がただ1回現れる．

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1\,(a,b>0,\ a$は無理数$)$」が示された．

逆にレイリーの条件が，2つのビーティ数列$I(a)$, $I(b)$が全ての自然数をもれなく一つずつ含むという事実を導くことは，次のようにして示される．

$[ma]=[nb]=k$となる$m,n,k\in\mathbb{N}$が存在したとする．すなわち，$k<ma<k+1$, $k<nb<k+1$である．式を変形して

$$\frac{m}{k+1}<\frac{1}{a}<\frac{m}{k},\quad \frac{n}{k+1}<\frac{1}{b}<\frac{n}{k}$$

2つの不等式の辺々を足し合わせて$\dfrac{m+n}{k+1}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1<\dfrac{m+n}{k}$．これを変形して$k<m+n<k+1$となるが，$m,n,k\in\mathbb{N}$より矛盾する．よって，$I$の中には同じ自然数は2回現れない．

次に，ある自然数$k\in\mathbb{N}$がIの中に現れなかったとする．すなわち，$ma<k<k+1<(m+1)a$, $nb<k<k+1<(n+1)b$となる$m,n\in\mathbb{N}$が存在したとする．式を変形して

$$\frac{m}{k}<\frac{1}{a}<\frac{m+1}{k+1},\quad \frac{n}{k}<\frac{1}{b}<\frac{n+1}{k+1}$$

2つの不等式の辺々を足し合わせて$\dfrac{m+n}{k}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1<\dfrac{m+n+2}{k+1}$．従って$k-1<m+n<k$となる．これは，$m,n,k\in\mathbb{N}$に矛盾するので，任意の自然数$k$は$I$の中にただ1回現れることが言えて，逆も成立することが分かる．

参考文献

[1] M. H. Albert, R. J. Nowakowski, D. Wolfe, 組合せゲーム理論入門―勝利の方程式，共立出版，2011.

[2] 秋山仁，中村義作，ゲームにひそむ数理―ゲームでみがこう!! 数学的センス，森北出版，1998.

[3] S. Beatty, A. Ostrowski, J. Hyslop and A. C. Aitken, Solutions to Problem 3173, Amer. Math. Monthly, 34 (1927), 159-160.

[4] C. L. Bouton, Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory, Ann. of Math., 3 (1901-1902), 35-39.

[5] A. Dress, A. Flammenkamp and N. Pink, Additive Periodicity of The Sprague-Grundy Function of Certain Nim Games, Adv, Appl. Math. 22 (1999), 249-270.

[6] M. Gardner, ペンローズ・タイルと数学パズル，丸善，1992.

[7] R. L. Graham, On a Theorem of Uspensky, American Mathematical Monthly, 34 (1963), 407-409.

[8] R. K. Guy, 数論「未解決問題」の事典，朝倉書店，2010.

[9] 土方弘明，Wythoff の二山崩しについて，数学，11 (1959), 28-30.

[10] 福井正則，中屋悠資，戸國友貴，A Generalized Ryuoh-Nim: A Variant of the classical game of Wythoff Nim，情報処理学会ゲーム情報学研究会，2016.

[11] 一松信，石とりゲームの数理，森北出版，1968.

[12] 片野善一郎，素顔の数学者達―数学史に隠れた152のエピソード，裳華房，2005.

[13] 片山真一，久保智哉，取る石に制限を付けたWythoffの石とりゲーム，第15回フィボナッチ研究集会，2017.

[14] 片山真一，久保智哉，制限付きのWythoffの二山崩し2，第16回フィボナッチ研究集会，2018.

[15] 小山慶太，寺田寅彦―漱石，レイリー卿と和魂洋才の物理学，中公新書，2012.

[16] H. Landman, A Simple FSM-based Proof of The Sprague-Grundy Function of Wythoff's Game, "More Games of No Chance" (R. J. Nowakowski ed.), Cambridge Univ. Press, 2002, pp.383-386.

[17] 宮寺良平，福井昌則，井上理哲人，中屋悠資，戸國友貴，Corner the Queen Problemの変種についての研究，情報処理学会研究報告，Vol. 2016-GI-35 No6, 2016/3/8.

[18] 宮寺良平，福井昌則，数式処理システムMathematikaを用いた高校生による数学研究Ⅱ，数理解析研究所講究録2022巻(2017)，29-39.

[19] 森本清吾，森本清吾全集，1955.

[20] 中村滋，フィボナッチ数の小宇宙，日本評論社，2002.

[21] P. Pesic（青木薫【訳】），青の物理学―空色の謎をめぐる思索，岩波書店，2011.

[22] J. W. S. Rayleigh, The Theory of Sound 1, 1894 (2nd ed.).

[23] 佐藤文広，石取りゲームの数学―ゲームと代数

の不思議な関係，数学書房，2014.

[24] 末續鴻輝，縦横方向の可能着手を All-ButNim に変えた竜王 NIM 一般化，情報処理学会研究報告，Vol. 2018-GI-40 No1, 2018/6/29.

[25] 寺田寅彦，レーリー卿(Lord Rayleigh)，寺田寅彦全集 5 巻 1960.

[26] 戸國友貴，竜王のニム :Wythoff Nim の変形，理数教育研究所，2018.

[27] J. V. Uspensky, On a Problem Arising out of the Theory of a certain Games, American Mathematical Monthly, 34 (1927), 516-521.

[28] I. M. Vinogradov. 整数論入門，共立出版 1959.

[29] 山脇弘樹，制限付きの石取りゲームの性質，2017 年度徳島大学総合科学部卒業論文.

[30] W. A. Wythoff, A Modification of the Game of Nim, Nieuw Arch, Wisk. 7 (1907), 199-202.