研究ノート

碁石拾いと Fibonacci 数

片 山 真 一*, 安 井 宏 晴**

1．「碁石拾い」とは何か

昨年の科学史研究会雑誌では，「石取りゲーム」の「Wythoffの二山崩しの変種」に関する我々の結果を報告した．その中では，日本での石取りゲームの研究について，明治以降になって海外から輸入される形で始まり現在まで発展してきたという歴史的な面と現在行われている研究(我々の研究を含む)について紹介した．今回は，それから自然に派生した次のような問題を考える．

問題)江戸時代の和算では，石取りゲームに該当するものは無かったか？

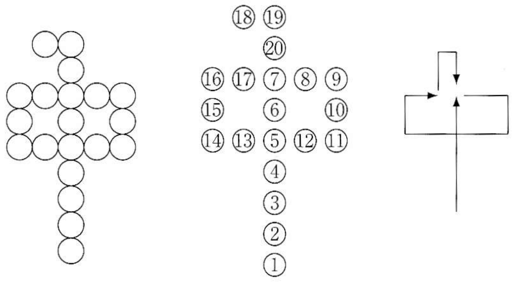
我々が調べた限りでは，江戸時代には，現在扱われている石取りゲームのような二人以上の対戦型のゲームは余り発達しなかったようである．しかし平山諦の『東西数学物語』では，白石と黒石を並べて二人以上で対戦できる石取りゲームの一種の「四ッ石惣どりご，四ッ目惣どり，三ッ星惣どり」の三種を『和國知恵較』から記載していて，それ自身も興味深いゲームであるが，ここではその内容には立ち入らない．一方で，一人で遊ぶ石取りゲームの一種は，独自に発展していて，「ひろいもの」と名付けられていたたことが分かった．

『和國知恵較』より

なおネットでの検索では，「ひろいもの」は西洋では「オルフェウスの石」と呼ばれていたという記述も見つかっているが，今の所，根拠となる資料にはたどり着けておらず真偽の程は定かではない．上で言及した『東西数学物語』(1956年)は，和算に限らない様々な数学ゲームの話題を取り上げている．日本での数学ゲーム関連の主要な古典文献であり，ここで扱う「ひろいもの」に関しても，『和國知恵較』(環中仙 1727年)から5題，『勘者御伽双紙』(中根彦循 1743年)からも4題，さらに明治12年(1879年)の前田理軒の『算法玉手箱』から1題を選び，併せて10題が掲載されている．また問題だけでなく，その解答(原本の取り尽くし方法)も転載収録されている．

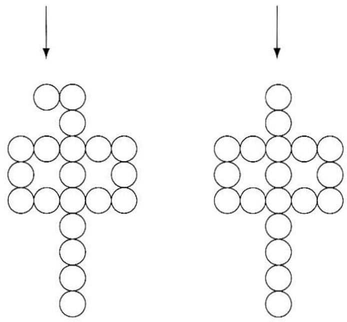
注意)古典的な著名問題としては，上の『和國知恵較』と『勘者御伽双紙』に以下の12題とその拾い尽くし方が残されている．『勘者御伽双紙』には，第一ヶ條「中の字」，第二ヶ條「六角」，第三ヶ條「井筒」，第四ヶ條「かんざし」，第五ヶ條「五の字」，第六ヶ條「八角」，第七ヶ條「九の字」の7題が取り上げられ残されている．また『和國知恵較』には，第一ヶ條「枡形」，第二ヶ條「矢の形」，第三ヶ條「片根矢の形」，第四ヶ條「八ツ橋」，第五ヶ條「卍の形」の5題が取り上げられて残されている．

この12題は，その問題すべてを転載しておく．さらにこの論説の最後にその取り尽くし方法も原本から転載しておく．最初に，碁石拾いの例として『勘者御伽双紙』から第一ヵ條の「中の字」(注：多分一番易しい)を取り上げ解説を加えておこう．



「中の字」の取り尽くし方法と取り尽くし方の略記方法

＊徳島大学理工学部
＊＊倉吉北高校



取り尽くせる要石と取り尽くし不可能な配置

注意）上で真ん中の部分を縦３段から縦４段にしたり，田を加えて「田中」にしても取り尽くし可能な図形にできる．

この問題一つだけからも，和算で扱われた「碁石拾い」の問題には，次のような特徴があることが見てとれる．

1．簡単に分かる場合は扱わない．
2．その配置で無ければ取り尽くせない微妙な場合を扱う．

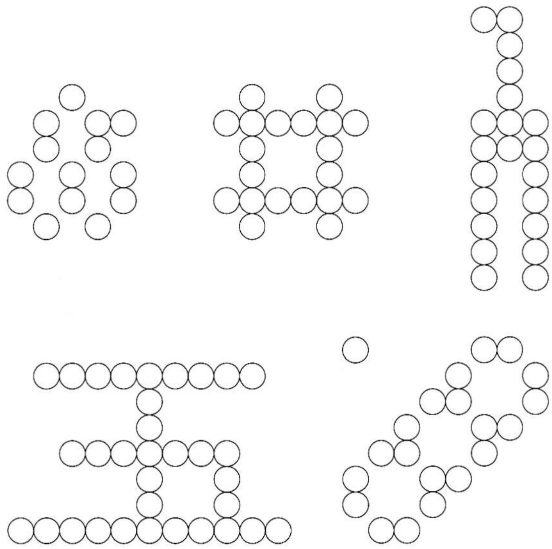
碁石拾いの問題を解く場合，その微妙な所が難しくもあり楽しみでもある部分である．しかし本当は，ギリギリ取り尽くしが可能な新しい配置を工夫して作ることの方が，与えられた問題を解くだけよりもっと興味深いように思える．そのためにもここでは取り尽くし可能という性質を数学的に考察してみることにしよう．なお本論文では，和算の「ひろいもの」も含め，全て「碁石拾い」という呼称を用いることにする．

ここで，改めて「碁石拾い」のルールについて説明しておこう．碁盤の上に置かれた石を，以下のルールに従って拾う．

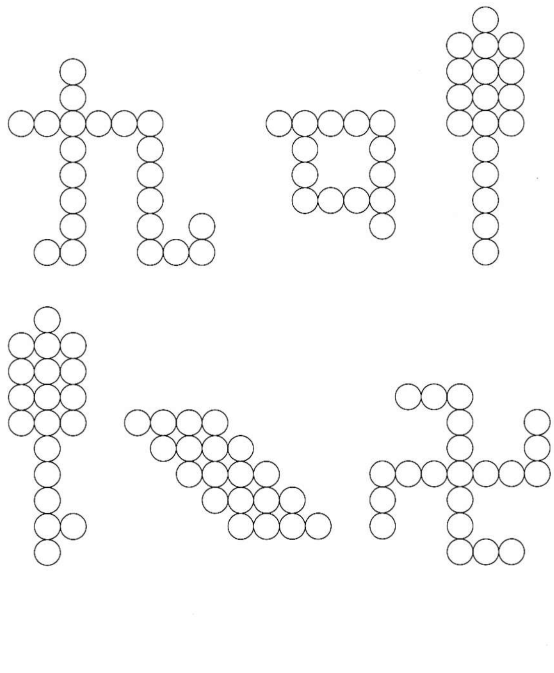
1．どこから取り始めても構わない．
2．上下左右（縦横のみ）に移動しながら順に石を取る．なお石のないところでは曲がれない．
3．進む先の石は必ず取る．
4．後戻りはできない．また斜めにも進めない．
5．全部の石を取り尽くしたらゲーム終了．

ここで『勘者御伽双紙』から「中の字」以外の６題と『和國知恵較』から５題，『数学玉手箱』から１題，『東西数学物語』から１題を転載しておく．

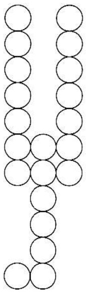
●第二ヶ條「六角」，第三ヶ條「井筒」，第四ヶ條「かんざし」，第五ヶ條「五の字」，第六ヶ條「八角」

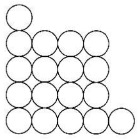


●『勘者御伽双紙』から，第七ヶ條「九の字」，『和國知恵較』から第一ヶ條「枡形」，第二ヶ條「矢の形」，第三ヶ條「片根矢の形」，第四ヶ條「八ツ橋」，第五ヶ條「卍の形」



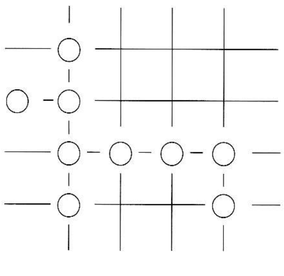
● 『和國知恵較』から『算法玉手箱』から「Y の形」, 『東西数学物語』から「枡形」





2．「碁石拾い」の基本的な性質

碁石拾い(ひろいもの)は, 上で述べたような過去の和算の問題しか無いわけではない. 現在でもパズルとして次々新しい問題が作成されており, ネットで「碁石拾い」と検索してみると新しい問題を載せているパズルのサイトが少なからずヒットする. さらにパズルゲームの出版社「ニコリ」は,「碁石拾い」という名前で, 新作の問題を掲載しており, ニコリの web サイトでは, 次の問題が掲載されている. 例題として解答も併記しておこう.



⑨
① ②
③ ④ ⑤ ⑥
⑧ ⑦

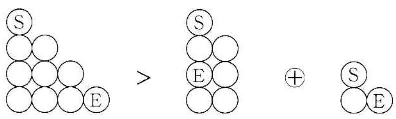
上の例題で①と⑨は, 始点か終点のいずれかにしかならない特殊な点である. 従って片方を始点に選べば, 自動的に他方は終点になる. 以下では, 碁石拾いの配置図のこの様な特殊な点を「端点」と呼ぶことにする. このとき「一筆書きの解法」と類似する次のような性質が成立する.

Theorem 2.1 与えられた碁石の配置に 3 点以上の端点があれば, その碁石を全て取り尽くすことは不可能である. また端点が 2 点のとき, 片方の端点を始点とすれば, 残りの 1 点は, 必ず終点になる.

注意) ニコリの例題では, ⑨を始点すると, 碁石は決して拾いきれない. 少し考察を加えると①を始点とする上の解は, 上の配置のただ一通りの取り尽くし可能な碁石の拾い方であることも分かる.

以下, 拾い尽くすことが可能な碁石の配置を「取り尽くし可能」, 不可能な配置を「取り尽くし不可能」と呼ぶ. 上で述べた Theorem 2.1 は, 取り尽くし可能な配置の必要条件が, 端点が 2 点以下であるという命題である. 2 つの碁石の配置 A_1, A_2 で, A_1 は, 端点 S_1, E_1 を持ち, A_2 は端点 S_2, E_2 を持つと仮定する. この 2 つの図形 A_1, A_2 の A_1 の端点 E_1 と A_2 の端点 S_2 を繋いだ図形 A を考える. このとき A_1 の碁石 S_1 を始点として碁石を取り始めたときに A_2 の部分に移るときには, E_1, S_2 を必ず経由し A_2 の部分を取り尽くすときは, E_2 を終点とする拾い方をする場合に, 図形 A を 2 つの図形 A_1, A_2 の「結合」と呼ぶ.

逆に, 配置 A が与えられたとき, A を 2 つの配置図形 A_1 と A_2 に分けて, A_1 の碁石を取り尽くし, A_1 の決められた点 E_1 を A_1 の終点とし, 隣接した[1] A_2 の点を A_2 の始点 S_2 として続けて A_2 を取り尽くす場合に, 配置 A を 2 つの配置 A_1 と A_2 に「分割する」と呼び, $A > A_1 \oplus A_2$ と表す.



分割の一例(後で述べる $A = T_4$, $A_1 = D_2$, $A_2 = T_2$ の場合)

Theorem 2.2 与えられた碁石の配置 A を取り尽くし可能な配置 A_1 と取り尽くし可能な配置 A_2 の 2 つの配置の結合に分割可能(即ち $A > A_1 \oplus A_2$)であるとき, 元の配置 A は, 拾い尽くし可能である.

Theorem 2.3 与えられた碁石の配置 A に対して, 次のような A の部分配置の集合 $S = \{A_1, \cdots\cdots, A_k\}$ が

[1] 縦横のライン上で隣にある連続して拾う碁石という意味であり, 間に空白や既にとった碁石しかない場合も隣接していると見なす.

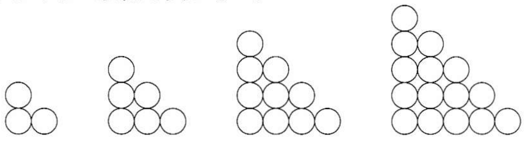
存在すると仮定する.

(1) A の石を取っていく過程で S のいずれかの配置 $A_i \in S$ が必ず現れる.

(2) $A_i \in S(1 \leq i \leq k)$ は全て取り尽くし不可能である.

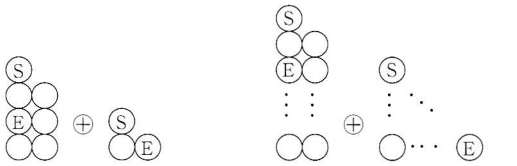
このとき A は取り尽くし不可能である.

下記のような碁石の配置を「三角積み」T_n と呼ぶ. この T_n に今述べた定理を適用してみよう. まず T_n は, 対角線に関して線対称な2つの端点を持つので, 取り尽くしの始点を「左上隅の石」, 終点を「右下隅の石」としても一般性を失わない.



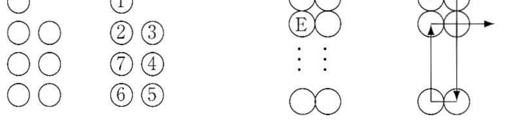
T_2　　T_3　　T_4　　T_5

上のように三角積みは, その一辺に並ぶ石の数 n でナンバリングして, T_2, T_3, T_4, T_5 と表すことにする. すなわち三角積み T_n とは, 一辺に碁石が n 個, 全体で碁石が $n + (n-1) + \cdots\cdots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 個上のように二等辺直角三角形の形に並んだ場合を指す. 次に T_{n+2} を T_n と次のような台形部分 D_n に分割する.



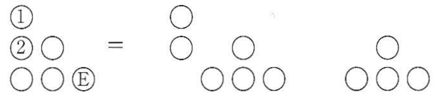
$T_4 > D_2 \oplus T_2$,　　一般の $T_{n+2} > D_n \oplus T_n$

このとき, 次の図で分かるように n が2以上のとき, 台形配置 D_n は, 始点 S から取り始めれば, 終点 E まで全ての石を取り尽くせる手順があることが分かる.



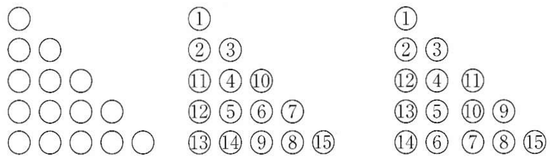
D_2 の取り尽くし方および一般の D_n の取り尽くし方

T_3 が取り尽くし不可能であることは, 次のようにして分かる. まず下の図の A_1 は, 端点を3点持ち, Theorem 2.1により取り尽くし不可能な配置であることが分かる. 次に $A = T_3$, $S = \{A_1\}$ とすると A, S が, Theorem 2.3の条件を満たす. 従って T_3 は取り尽くし不可能であることが分かる.



$A = T_3$　　A_1

一方で T_5 は取り尽くし可能である. 次のような2通りの取り尽くし方法があり, 実はこれらが取り尽くし可能な全ての取り尽くし方法である.



T_5　　取り尽くし法1　　取り尽くし法2

$T_{n+2} > \mathrm{D}_n \oplus T_n$ なので, T_n が取り尽くし可能なら T_{n+2} も取り尽くし可能であることが分かる. 従って T_2, T_5 が取り尽くし可能で, T_3 のみが取り尽くし不可能であることから, 次が成立する.

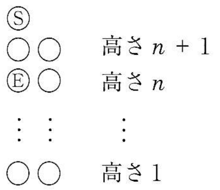
Theorem 2.4　三角積み T_n は, n が3の場合を除き取り尽くし可能である.

注意) 福井昌則氏, 末續鴻輝氏, 鈴木顕氏達は, 報告集 [8] (2017) で碁石拾いの問題の計算困難性についての結果を発表しており, その中でこの定理の結果も既に我々とは独立に得ている. ただし後で述べる取り尽くし方の数については, 考察をしておらず, 考察を加えた他の文献も今の所は見当たらない.

3.「三角積み」とフィボナッチ数

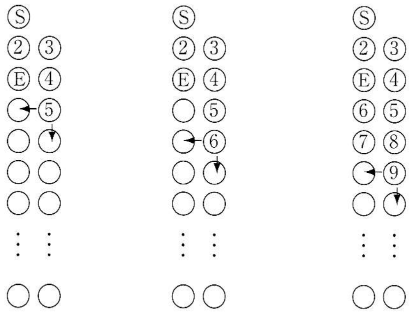
碁石拾いを考える場合, 上で考察したように取り尽くせるかどうかの判定が最初に扱うべき問題である. 次に考えるべき1つの問題は, 取り尽くせる場合に, 「一体何通り取り尽くし可能な方法があるか」である. ここでは, 碁石の初期配置 A で, その始点 S と終点 E があらかじめ設定してあるような場合を扱う. その全ての取り尽くし方法の総数を $C(A)$ と書くことにする. 最初に扱うのは, 三角積みの所で考えた次ページのような台形配置 D_n である. T_n との関係で D_n の $2n+3$ 個の碁石の中の始点と終点は, 図で示した S, E に固定しておく. このとき台形 D_n の取り尽くし方の数 $C(D_n)$ について次のことが成立する.

台形配置 D_n の碁石の配置と始点 S, 終点 E の設定は次の通り.



Theorem 3.1　$n \geq 2$ のとき $C(D_n) = F_{n-1}$(n 番目のフィボナッチ数)

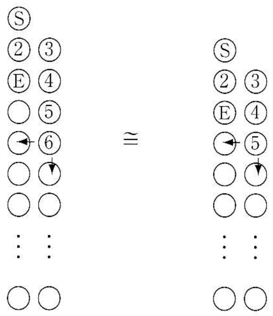
D_nの取り方，真下の石を取る場合と左の石を取る場合



漸化式 $C(D_{n+2}) = C(D_{n+1}) + C(D_n)$ の根拠となる碁石の配置は次を参照のこと．

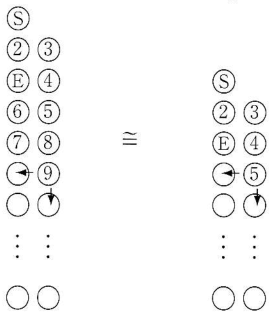
D_{n+1} (真下の石を取る場合)

D_{n+1}



D_{n+2} (左の石を取る場合)

D_n



注意) 上の図で≅という記号は，2つの配置の取り尽くし方法が同一視できることを表わす．

上の図から漸化式 $C(D_{n+2}) = C(D_{n+1}) + C(D_n)$ が分かる．$C(D_3) = C(D_2) = 1$ は容易に確かめることができるので，併せて先程のフィボナッチ数での表示が得られる．この結果と碁石配置の分割の考え方から「三角積み」T_n の取り尽くし方の数 $C(T_n)$ の下からの評価が次のようにして得られる．簡単のため，$n = 2m+4$ に制限した場合の結果のみを述べておく．

$T_{2m+4} > D_{2m+2} \oplus T_{2m+2} > D_{2m+2} \oplus D_{2m} \oplus T_{2m} > \cdots\cdots > D_{2m+2} \oplus D_{2m} \oplus D_{2m-2} \oplus \cdots\cdots \oplus D_2 \oplus T_2$ であり，取り尽くし方法の総数に関する次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} C(T_{2m+4}) &\geq C(D_{2m+2})C(T_{2m+2}) \\ &\geq C(D_{2m+2})C(D_{2m})C(T_{2m}) \geq \cdots\cdots \\ &\geq C(D_{2m+2})C(D_{2m})C(D_{2m-2})\cdots\cdots C(D_2)C(T_2). \end{aligned}$$

Theorem 3.2　$C(T_{2m+4}) \geq F_{2m+1} \cdot F_{2m-1} \cdots\cdots F_3 \cdot F_1.$

$n \geq 1$ のとき，フィボナッチ数の下からの評価式 $F_n \geq \phi^{n-2}$ が成立することを用いると次の評価式を得る．

Theorem 3.3　$\log C(T_{2m+4}) \geq (\log \phi) m^2$，ここで ϕ は黄金比 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．

なお $n!$ の上からの評価を用いた上からの評価式も併せて書くと次を得る．

Theorem 3.4　$(\log \phi) m^2 \leq \log C(T_{2m+4}) \leq (\log(4m+2))(2m^2+9m+5).$

$n = 2m+5$ の時も，偶数の場合と同様に $T_{2m+5} > D_{2m+3} \oplus T_{2m+3} > D_{2m+3} \oplus D_{2m+1} \oplus T_{2m+1} > \cdots\cdots > D_{2m+3} \oplus D_{2m+1} \oplus D_{2m-1} \oplus \cdots\cdots \oplus D_5 \oplus T_5$ であり，取り尽くし方法の総数に関しても同様の以下の評価式を得る．

$$\begin{aligned} &C(T_{2m+5}) \geq C(D_{2m+3})C(T_{2m+3}) \geq \\ &\quad C(D_{2m+3})C(D_{2m+1})C(T_{2m+1}) \geq \cdots\cdots \geq \\ &\quad C(D_{2m+3})C(D_{2m+1})C(D_{2m-1})\cdots\cdots C(D_5)C(T_5). \end{aligned}$$

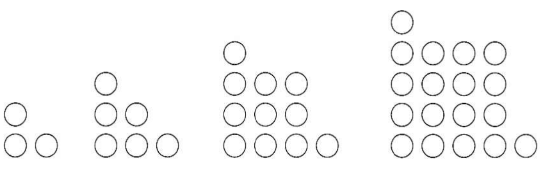
Theorem 3.5　$C(T_{2m+5}) \geq F_{2m+2} \cdot F_{2m} \cdots\cdots F_4 \cdot F_2.$

Theorem 3.6　$\log C(T_{2m+5}) \geq (\log \phi)(m^2 + m).$

Theorem 3.7　$(\log\phi)(m^2+m)\leq\log C(T_{2m+5})\leq(\log(4m+4))(2m^2+11m+10)$.

4．枡形の場合

東西数学物語で扱われたタイプの「枡形」の系列についても，取り尽くし可能性の問題を考えてみよう．下記のような碁石の配置を「枡形」M_nと呼ぶ．このM_nに Theorem 2.2 を適用する．T_nと同様に，M_nも対角線に関して線対称な２つの端点を持つので，取り尽くしの始点を「左上隅の石」，終点を「右下隅の石」としてよい．また下の図M_4のときのL_4と同様に，M_nに含まれる$2\times n$のＬ字フック型構造に着目すると，M_{n+2}を本質的にM_nと同一視できる部分とL_{n+2}とに二分割できる．すなわち$M_{n+2}>L_n\oplus M_n$と見なすことができる．



M_1　　M_2　　M_3　　M_4

ここでL_{n+2}は左上の碁石を始点として，左端の２段目の碁石を終点とする取り尽くしが常に可能なので，M_nが取り尽くし可能ならM_{n+2}も取り尽くし可能である．まず枡形M_1は，三角積みT_2と同一なので取り尽くし可能であり，枡形M_2は，三角積みT_3と同一なので取り尽くし不可能である．

一方で，枡形M_4については，東西数学物語で，全ての取り尽くし方が数えられていて全部で32通りの取り尽くし方が可能であることが示されている．以上から次の定理を得る．

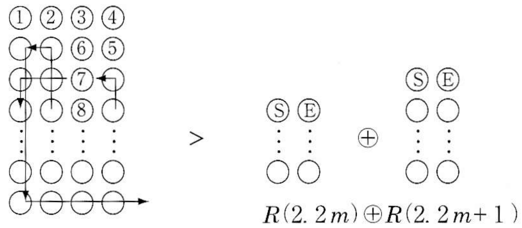
Theorem 4.1　枡形M_nは，nが２の場合を除き全て取り尽くし可能である．

枡形M_nについても取り尽くし方の総数$C(M_n)$を考えることができるが，上の定理で用いたＬ字フック型L_nを用いた場合の下からの評価は，$C(M_{n+2})\geq C(L_{n+2})C(M_n)\geq F_{n+1}F_{n-1}C(M_n)$を帰納的に用いることで得られる．一方で$n\times n$の正方形の碁石の配置$S_n$の始点を左上端の点，終点を右下端の点としたときの取り尽くし方の総数$C(S_n)$との間には，関係$C(M_n)\geq C(S_n)$が成立する．この関係を用いると，少しだけであるが以下のように下からの評価が改良できる．

$n\times 2$のn段２列の長方形の形の碁石の配置$R(n,2)$を考える．このn段２列の左列上端の碁石を始点として，右列最上段の石を終点とする取り尽くし方を$r_n=C(R(n,2))$とする．このとき台形D_nの場合と同様に$r_2=r_3=1$，$r_{n+2}=r_{n+1}+r_n$が成立して，結局$r_n=F_{n-1}$が成立することが示せる．

まず正方形S_{2m+4}は，$S_{2m+4}>R(2m+4,2)\oplus R(2m+4,2m+2)$
$>R(2m+4,2)\oplus R(2m+4,2)\oplus R(2m+4,2m)$
$>R(2m+4,2)\oplus\cdots\cdots$
$\oplus R(2m+4,2)\oplus R(4,2m+4)$.

さらに$R(4,2m+4)$は次のような分割を許すことから次の下からの評価が得られる．



$R(2.2m)\oplus R(2.2m+1)$

Theorem 4.2　$C(M_{2m+4})\geq F_{2m+3}^{m}\cdot F_{2m}\cdot F_{2m-1}$.

T_nの時と同様に，フィボナッチ数の下からの評価式$F_n\geq\phi^{n-2}$を用いると次の下からの評価ができる．

Theorem 4.3　$\log C(M_{2m+4})\geq(\log\phi)(2m^2+6m-5)$.

なお上からの評価も併せて次のような結果を得る．

Theorem 4.4　$(\log\phi)(2m^2+6m-5)\leq\log C(M_{2m+4})\leq(\log(4m+5))(4m^2+16m+15)$.

$n=2m+3$の時も，偶数の場合と同様に
$M_{2m+3}>R(2m+3,2)\oplus R(2m+3,2m+1)>R(2m+3,2)\oplus R(2m+3,2)\oplus R(2m+3,2m-1)>$
$\cdots\cdots>R(2m+3,2)\oplus R(2m+3,2)\oplus\cdots\cdots$
$\oplus R(2m+3,2)\oplus R(2m+3,1)$.

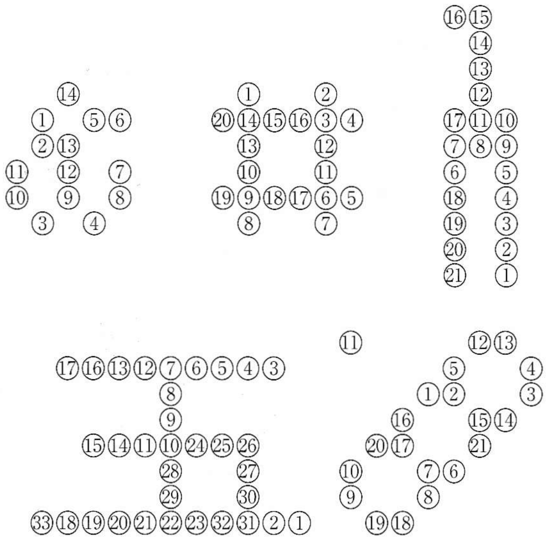
取り尽くし方法の総数に関しても同様に評価式$C(M_{2m+3})\geq F_{2m+2}^{m+1}\geq\phi^{2m^2+2m}$が成立し最終的に次の評価が得られる．

Theorem 4.5　$(\log\phi)(2m^2+2m)\leq\log C(M_{2m+3})\leq(\log(4m+3))(2m^2+12m+8)$.

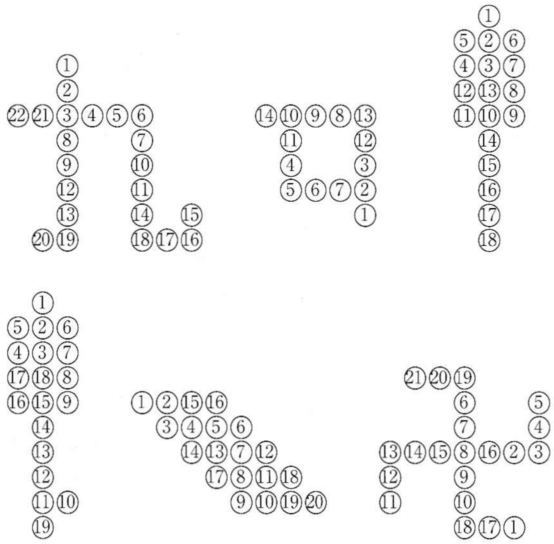
最後に最初に述べた古典の「碁石拾い」の取り尽くし方法(それぞれ『勘者御伽双紙』,『和國知恵較』,『東

西数学物語』に記載された解法)を転載しておこう.

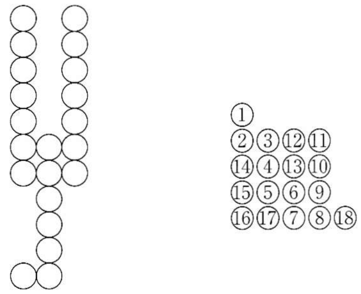
『勘者御伽双紙』第二ヶ條「六角」, 第三ヶ條「井筒」, 第四ヶ條「かんざし」, 第五ヶ條「五の字」, 第六ヶ條「八角」



第七ヶ條「九の字」,『和國知恵較』第一ヶ條「枡形」,『和國知恵較』第二ヶ條「矢の形」, 第三ヶ條「片根矢の形」, 第四ヶ條「八ツ橋」, 第五ヶ條「卍の形」,



『算法玉手箱』「Ｙの形」(「かんざし」の上下をひっくり返した配置で記載されている取り尽くし方も対称),『東西数学物語』の「枡形」(32 通りの取り尽くし方の 1 番目)



参考文献

[1] 秋山仁, 中村義作, ゲームにひそむ数理―ゲームでみがこう!! 数学的センス, 森北出版, 1998.

[2] 片山真一, 久保智哉, Wythoff の石取りゲームと Rayleigh の定理, 徳島科学史雑誌, Vol.37, 17-26, 2018.

[3] 片山真一, 安井宏晴, 碁石ひろいとフィボナッチ数, 第 17 回フィボナッチ研究集会報告集 2019.

[4] 佐藤文広, 石取りゲームの数学―ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房, 2014.

[5] 中根彦循, 勘者御伽双紙(中), 早稲田大学図書館, www.wul.waseda.ac.jp/katenseki/html.

[6] 平山諦, 東西数学物語, 恒星社厚生閣, 1956.

[7] 福井昌則, アクティブ・ラーニングを促進する数理的パズル「碁石拾い」を題材とした iPad アプリケーションの開発, コンピュータ利用研究集会「コンピュータ＆エデュケーション」42, pp.55-58. 2017.

[8] 福井昌則, 末續鴻輝, 鈴木顕, Compexity of "Goishi Hiroi", Proceedings of th 20th Anniversary of Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs and Games, (JCDCG[3]), pp.131-132, 2017.

[9] 福田理軒, 和洋普通算法玉手箱上, 国立国会図書館デジタルアーカイブ.