

断続動作特性を有する非線形力学系の分岐解析

高坂 拓司

1999年3月

目次

第 1 章	まえがき	1
第 2 章	断続動作特性を有する非線形力学系	3
2.1	まえがき	3
2.2	断続動作特性を有する力学系の分類	3
2.3	断続動作特性を有する非線形力学系にみられる分岐	7
2.3.1	非線形力学系の周期解にみられる分岐	7
2.3.2	断続動作特性を有する非線形力学系にみられる分岐	9
2.4	断続動作特性を有する非線形力学系のカオス制御	11
2.4.1	カオス制御	11
2.4.2	断続動作特性を有する力学系の安定化制御	11
2.4.3	安定な平衡点・周期軌道の不安定化制御	12
第 3 章	結合した 2 つの方形波発振器に生じる周期解の解析	13
3.1	まえがき	13
3.2	EFF 回路	14
3.3	結合 EFF 回路	15
3.4	リターンマップ F	19
3.5	解析	20
3.6	むすび	28
第 4 章	時刻依存型断続特性を有する非線形力学系における分岐	29
4.1	まえがき	29
4.2	解析方法	30
4.2.1	問題の記述	30
4.2.2	Poincaré 写像	30
4.2.3	分岐パラメータ計算法と固定点の性質	32
4.3	時刻依存型断続特性を有する Alpazur 発振器	32
4.3.1	回路方程式とスイッチング動作	32
4.3.2	単体の Alpazur 発振器の分岐	34

4.3.3	解析結果	35
4.3.4	回路実装	42
4.4	断続 RC 回路を持つ BVP 発振器	49
4.4.1	回路方程式	49
4.4.2	スイッチング動作	50
4.4.3	解析結果	51
4.4.3.1	スイッチング動作がない場合の平衡点の性質	51
4.4.3.2	$B=0.0$, $B=0.5$ の場合 (準周期解と同期化)	52
4.4.3.3	$B=0.58$ の場合 (カオスアトラクタの出現)	55
4.4.3.4	$B=0.6$, $B=0.65$ の場合 (振動現象の消滅)	58
4.5	むすび	61
第 5 章	状態依存型断続特性を有する非線形力学系における分岐	63
5.1	まえがき	63
5.2	局所的な分岐の解析方法	64
5.2.1	問題の記述	64
5.2.2	局所断面と Poincaré 写像	64
5.2.3	分岐パラメータ計算法	67
5.3	大域的な分岐の解析方法	67
5.4	状態依存型断続特性を有する Alpazur 発振器	68
5.4.1	回路方程式とスイッチング動作	68
5.4.2	局所座標上の Poincaré 写像	69
5.4.3	スイッチング動作が無い Alpazur 発振器	70
5.4.4	周期解とその安定性	71
5.4.5	解析結果	76
5.4.6	回路実装	82
5.5	むすび	83
第 6 章	不安定化制御によるカオスの一生成法	85
6.1	まえがき	85
6.2	問題の記述	85
6.3	安定平衡点に対する不安定化	86
6.3.1	制御器の構成	86
6.3.2	勾配系 (Gradient System)	87
6.4	安定なリミットサイクルに対する不安定化	89
6.4.1	Poincaré 写像と差分方程式系	89
6.4.2	局所座標系での制御器設計	90
6.4.3	適用例	92

6.4.3.1	van der Pol 方程式	92
6.4.3.2	拡張 BVP 発振器	96
6.5	むすび	100
第 7 章	断続動作特性を有する非線形力学系におけるカオスの一制御法	101
7.1	まえがき	101
7.2	問題の記述	102
7.3	時刻依存型断続特性を有する非線形力学系の安定化	103
7.3.1	Poincaré 写像と制御系の設計	103
7.3.2	時刻依存断続動作特性を有する Alpazur 発振器に観測されるカオスアトラクタ の制御	104
7.4	状態依存型断続特性を有する非線形力学系の安定化	105
7.4.1	局所断面と Poincaré 写像	105
7.4.2	局所空間 Σ における制御器の設計	105
7.4.3	状態依存断続動作特性を有する Alpazur 発振器	106
7.5	むすび	107
第 8 章	まとめ	109
	謝辞	111
	文献	113
	参考文献	113
	参考文献	113
	本研究に関連する原著論文	117
	本研究に関連する国際会議	117
	本研究に関連する学会研究会資料等	117

第 1 章

まえがき

状態や時刻に対して滑らかでない特性を有する微分方程式は、30 年以上前から研究されている。電気回路においては、滑らかでない特性を持つ回路、いかえれば断続動作特性を有する回路 [1] はオペアンプを用いたコンパレータ、ダイオード、スイッチなどによって、容易に実現可能である。カオスが注目されてからはカオス振動を起こす系の例として、区分線形系では Chua 回路 [2]、ダイオードを含む強制レイリー発振器 [3]、ヒステリシス特性を持つ回路 [4] 等について、様々な分岐現象の解析、カオス現象の検討などが行なわれている。区分線形系の応用例としても、Occasional Proportional Feedback を用いたカオスの制御 [5]、カオス同期 [6]、コンバータ回路 [7]、人工ニューラルネットワークを用いた連想記憶 [8] など興味深い多くの研究がなされている。これらは区分線形系であるため、厳密解による安定性解析やリターンマップなどを用いて周期解の分岐集合の計算を可能にしている。

ところで、生物、化学反応系の様々な振動現象のほとんどは非線形系で記述される。非線形系では、解軌道の求積は解析的には不可能なため、様々な数値解析手法を用い、解の定性的性質 (分岐現象) を調べている。しかし、例えば神経モデルにインパルスが付加されたシステム [9]、生物の睡眠・覚醒モデルにおいて外界因子として方形波が含まれる場合 [10]、シナプス結合 Hodgkin-Huxley 方程式 [11] などは、系が不連続 (不可微分) 点を含むためこれまでに提案されている様々な分岐の計算手法が適用不可能である。この場合、任意の断続動作特性を有する非線形力学系の解析手法は提案されておらず、解析もある限定された例において若干行われているに過ぎない。そこで、本論文では任意の断続動作特性を有する非線形力学系にみられる周期解の分岐パラメータ計算方法を提案し、電気回路系への適用を試み解析を行なう。解軌道は、スイッチング素子の切り替え動作の影響を受け、不連続に変化、もしくは連続でも微分が不可能となる。そこで、局所断面をこれら切り替え点で定義し、局所的な写像の合成により Poincaré 写像を構成して、固定点の安定性を議論することが可能となった。

各章の内容を以下にまとめる：

第 2 章では断続動作特性を有する非線形力学系について述べ、分類を行なう。なめらかな系に発生する周期解の余次元 1 の分岐についても述べる。断続動作特性を有する力学系には、上記以外にも 2 種類のなめらかな系では観察できない分岐が発生するが、これらについても簡単な説明を行なう。また、カオスの工学的応用として、系にカオスが発生しているシステムに対し、カオスに内在する不安定周期軌道のうち一つを安定な周期解に制御するカオス制御が注目されている。このことに関しても簡単に説明し、断続動作特性を有する力学系におけるカオス制御の現状、問題点について述べる。

第 3 章では発振周波数を決めるオペアンプのスイッチングに関するしきい値が変化する方形波発振器を提案し、これらの発振器をお互いに接続させたとき、システムが呈する現象について解析を行なう。これらの回路のダイナミクスは、外力の条件によって切り替わる 1 次元線形微分方程式で記述され、2 種類の方形波発振器を接続した場合、状態空間内の 4 つの半平面で定義される区分線形系となる。厳密解を用いてリターンマップを導出し定理を与え、周期解の発生領域を示す。

第 4 章では時刻依存型断続特性を有する非線形力学系にみられるリミットサイクルについて、分岐曲線追跡アルゴリズムを提案する。適用例として、周期開閉スイッチを持つ 2 次元および 3 次元非線形断続回路の分岐集合を数値計算により求め、Neimark-Sacker 分岐に沿って存在する位相同期解、カオスについて検討を行ない、パラメータの変化と系に発生する解軌道に関する考察を行う。

第 5 章では、状態依存型断続特性を有する非線形力学系にみられるリミットサイクルについて、その分岐パラメータを計算する一手法を提案する。次に、本手法を状態に依存して動作するスイッチを持つに 2 次元非線形断続回路に対し適用し、発振器にみられる周期解の分岐現象を考察する。ヒステリシス回路には、接線分岐、周期倍分岐、大域的性質による分岐が観測されたが、特に基本調波についてその分岐構造を明らかにし、大域的分岐の性質についても述べる。第 3-5 章におけるいくつかの理論的な結果は回路実装によっても確認する。

第 6 章では通常の制御とはまったく逆の視点に立ち、自律系にみられる安定平衡点やリミットサイクルに対して線形制御理論の極配置法を応用し、軌道の性質を不安定にするフィードバックを施してカオスアトラクタを発生させる手法について述べる。安定平衡点の場合は、平衡点周りの特性方程式の極を不安定に指定した制御器を取り付け、制御を印加する時間を適当に与える。またリミットサイクルに対しては、Poincaré 写像を定義し、それによって得られる差分方程式系の固定点を不安定化させる制御系を構成し、カオスを発生させる。これらの手法の適用例として、勾配系回路、van der Pol 方程式、拡張 BVP 発振器のモデルにそれぞれ不安定化制御を施し、得られたカオスについて検討する。

第 7 章では、断続動作特性を有する非線形力学系のカオス制御の一手法を提案する。これらの力学系は第 4 章、第 5 章で示した場合に分類されるが、各々の場合に関して Poincaré 写像を導出可能であり、この結果、カオスアトラクタの不安定固定点が計算可能となる。例題として、第 4 章、第 5 章で示した回路において観測されたカオスの不安定周期軌道の安定化を試みる。

第 8 章では本論文のまとめを述べる。

第 2 章

断続動作特性を有する非線形力学系

2.1 まえがき

系を記述する常微分方程式が、周期的かつ断続的に切り替わるような電気回路は断続回路と呼ばれる [1]. 例えば回路内にスイッチを含み、任意の外力により強制的に動作させる場合、またダイオード、トランジスタなど回路の状態に依存するスイッチを含む場合などは典型的な例である (図 2.1.1 参照). これら素子の動作により、系の運動方程式 (ベクトル場) そのものが切り替えられ、これに伴って相空間の幾何学的性質や、系の運動の定性的性質が影響を受けることとなる. すなわち、それぞれベクトル場が定義された状態空間内の流れをスイッチング動作により貼り合わされる合成力学系となっている. また、たとえば状態空間が平面であり、各平面に重なりがある場合、重なりが生じる部分で状態がどの平面にあるかによって流れが異なる、いわゆるヒステリシスが生じ、流れの大域的性質を複雑なものにする. このような合成力学系 (不連続ベクトル場) の問題は、古くから非線形制御系や最短時間制御系の合成問題などとして取り扱われ、多くの興味深い解析結果が報告されている.

我々の研究の目的は、

様々な断続動作特性を有する力学系にみられる諸現象を分岐理論を用いて解明する

ことである. 分岐現象とは、常微分方程式で記述されるような系において、系のパラメータを変化させたとき、あるパラメータの値で系の状態に定性的性質の変化が生じる現象である. また、このときのパラメータを分岐パラメータと呼ぶ. これまでにも、1 章で述べた区分線形系ではすでにさまざまな興味深い研究が行なわれている. 本論文においても 3 章でホタルを模擬した電気回路を提案し解析を行なう. この系は簡単な区分線形系で記述できるが、さまざまな周期的、非周期的な解軌道が観察される非常に興味深い系である. 一方、断続動作特性を有する非線形力学系、言い換えれば任意の非線形関数を含む常微分方程式系における分岐問題を取り扱った例は見当たらない. 本論文では 4, 5 章において、断続動作特性を有する非線形力学系を取り上げ、観測される周期解の分岐パラメータの計算法を提案し、解析を行なう.

2.2 断続動作特性を有する力学系の分類

断続動作特性を有する非線形系の解析方法は、大きく分けて次の 2 種類:

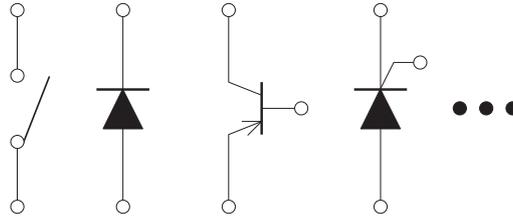


図 2.1.1 断続回路に含まれるスイッチの例

case a 解軌道は連続であるが不可微分点を持つ系

case b 解軌道が不連続である系

に分類され、これらはさらに次の 3 種類:

1. 系自体が外力で強制的に変化する場合 (時刻依存型断続特性)
2. 系自体が状態に依存して変化する場合 (状態依存型断続特性)
3. 時刻依存型断続特性と状態依存型断続特性が混合している場合 (時刻・状態混合型断続特性)

に分類される。区分非線形系は常にこの 6 種類のいずれかに分類される。図 2.2.1~図 2.2.4 に **case a.1, 2**, **case b.1, 2** をそれぞれ示す。

不連続な外力波形を印加した系は外力の不連続点で系が変化したとみなせるため、**case a.1, 2, 3** のいずれかの特別な場合であることに注意する。**case b** は、系にインパルス列の印加されたときのみが発生する特別な場合であるが、**case b.1** は土居らによる位相遷移曲線 (Phase Transition Curve) を利用した神経モデルにインパルスが付加されたシステムの解析 [9] [12] [13]、同様の系における吉永らによる詳細な解析 [14] が行なわれている。**case b.2** も吉永らにより現在解析が進められている [15]。また、**case a.3**, **case b.3** は **case a.1, 2**, **case b.1, 2** を応用することで解析可能であるため省略し、**case a.1, 2** に関して 4 章, 5 章で

計算手法の提案及び解析を行なう。

case a.1, 2 における解軌道を図 2.2.1, 図 2.2.2 にそれぞれ示す。**case a.1** は一定の時間が経過すると運動方程式が切り替わる系である。図 2.2.1 の場合、まず τ_0 時間ある関数 f_0 に従い、次の τ_1 時間は次の関数 f_1 に従うといった動作が繰り返し行なわれる。そして τ 時間経つと、再び τ_0 時間は関数 f_0 に従う系である。同様に、**case a.2** はある状態に解軌道が到達すると運動方程式が切り替わる系である。一般にこのようなシステムは解軌道は連続であるが不可微分点を持つ。それゆえ、特に、状態依存型断続特性を有する系 **case a.2, 3**, **case b.2, 3** は 2.3.2 節で述べる特別な分岐が発生する可能性がある。

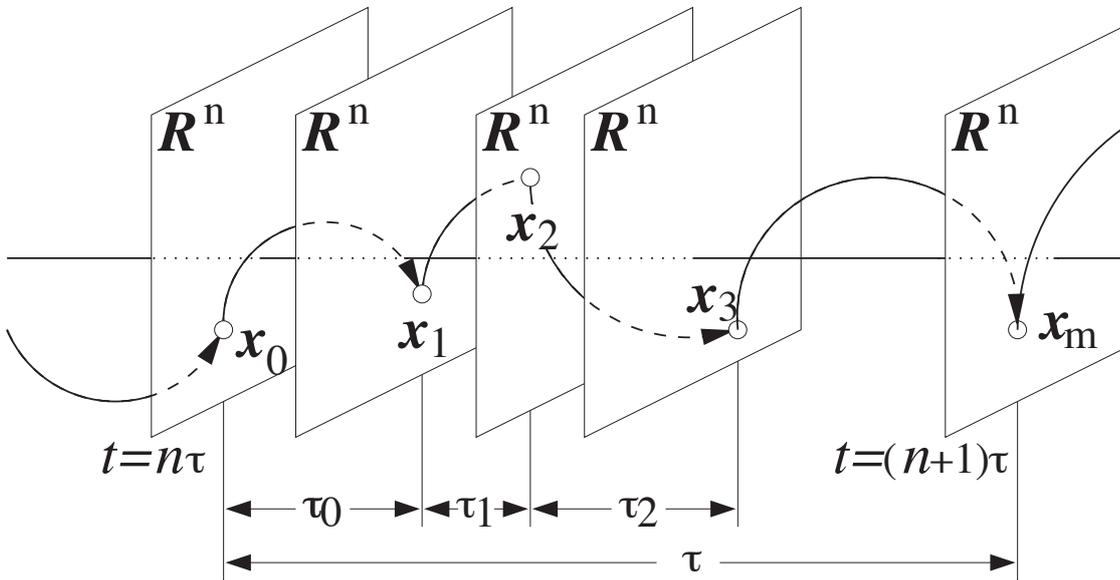


図 2.2.1 case a.1 における解軌道

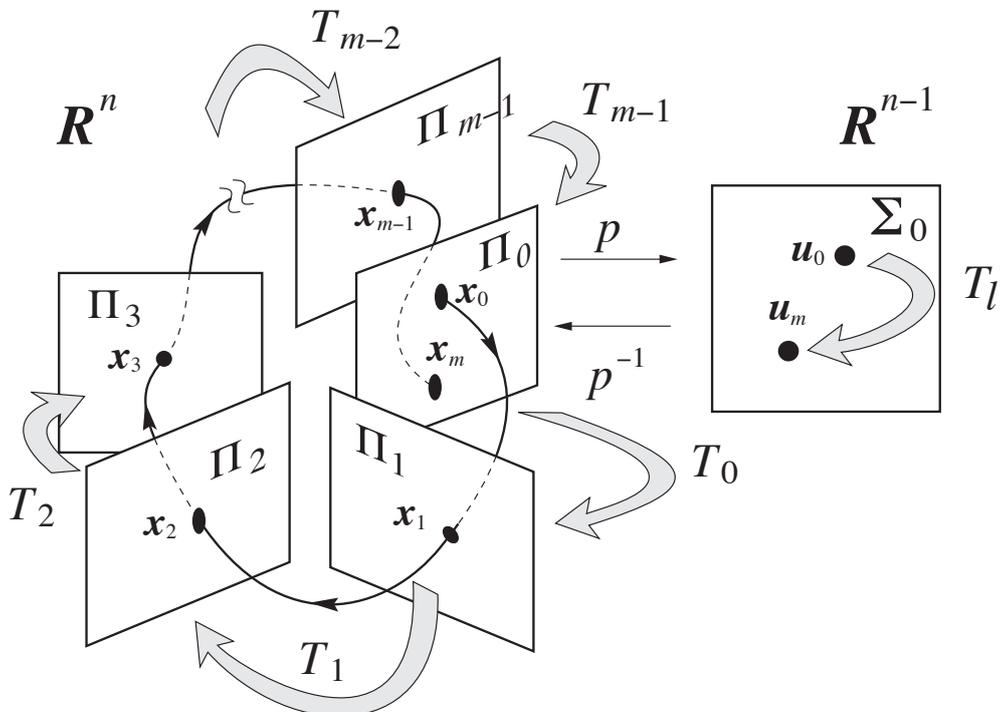


図 2.2.2 case a.2 における解軌道

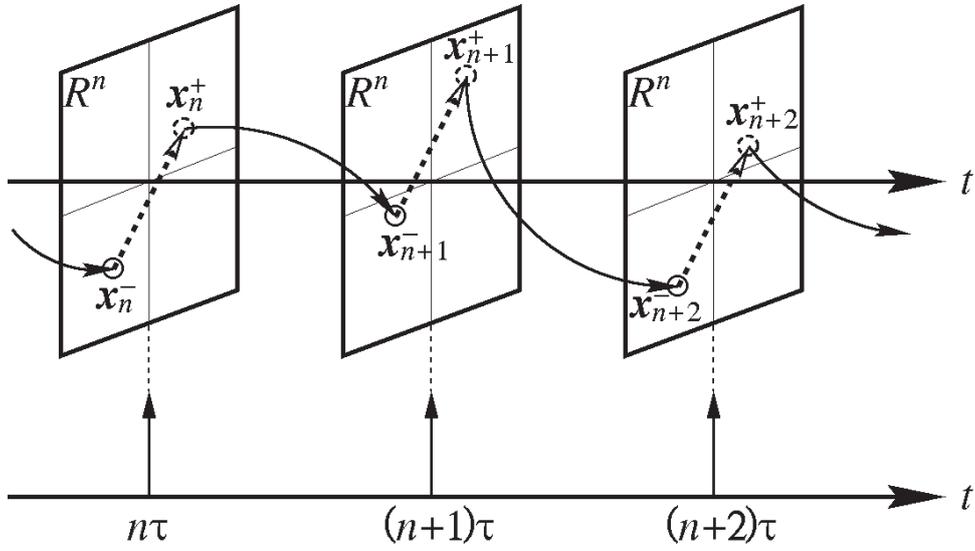


図 2.2.3 case b.1 における解軌道

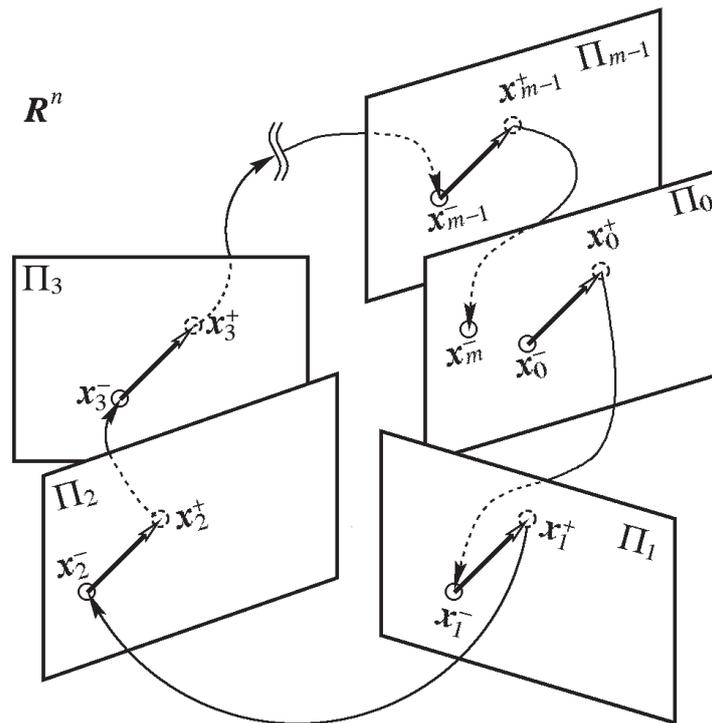


図 2.2.4 case b.2 における解軌道

2.3 断続動作特性を有する非線形力学系にみられる分岐

2.3.1 非線形力学系の周期解にみられる分岐

常微分方程式で記述される非自律系：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r \quad (2.3.1)$$

および自律系：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r \quad (2.3.2)$$

を考える。ここで \mathbf{x} は状態変数、 $\boldsymbol{\lambda}$ はパラメータ、 t は時刻を表す。 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ は各変数について必要な回数だけ微分可能とする。非自律系と自律系の場合にわけてそれぞれ Poincaré 写像を定義する。

非自律系の場合、 \mathbf{f}_1 は時間 t に関して周期 L の周期関数とする。

$$\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{f}_1(t + L, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \forall t \quad (2.3.3)$$

式 (2.3.2), (2.3.1) において、 $t = 0$ で初期値 \mathbf{u} を出発する解を

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{x}(0) &= \boldsymbol{\varphi}(0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

とおく。非自律系 (2.3.1) においては、系の周期性 (2.3.3) を用いて次の Poincaré 写像が定義できる。

$$\begin{aligned} T_\lambda &: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\varphi}(L, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

自律系 (2.3.2) においては周期解 (2.3.4) に対して、適当な局所断面 Π を定義する。その局所座標を p とすると：

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid q(\mathbf{x}) = 0, q: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}\} \quad (2.3.6)$$

$$p: \Pi \rightarrow \Sigma \subset \mathbf{R}^n \quad (2.3.7)$$

このとき、点 $\mathbf{v}_0 = p(\mathbf{x}_0) \in \Sigma$ の近傍の点 $\mathbf{v}_1 \in \Sigma$ に対して、 $p^{-1}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{x}_1 \in \Pi$ を出発する解は再び Π と交わる。その時刻を $L(\mathbf{x}_1)$ とすれば局所座標 Σ 上の Poincaré 写像：

$$\begin{aligned} T_\lambda &: \Sigma \rightarrow \Sigma \\ \mathbf{v}_1 &\mapsto \mathbf{v}_2 = p(\boldsymbol{\varphi}(L(p^{-1}(\mathbf{v}_1)), p^{-1}(\mathbf{v}_1), \boldsymbol{\lambda})) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

が定義できる。

式 (2.3.2), 式 (2.3.1) の写像 T_λ を Poincaré 写像とすることにより、解析が可能となる。 T_λ の固定点、周期点やカオスなどは、元の力学系の周期解やカオスに対応する。以下では、 T_λ の固定点の分岐について考える。 m 周期点に関しても同様の議論が可能である。以下、 T_λ の固定点の分岐について考える。

点 $\mathbf{v} \in R^n$ を T_λ の固定点とする :

$$\mathbf{v} - T_\lambda(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.3.9)$$

また, この固定点に関する特性方程式を

$$\chi(\mu) = \det(\mu I_n - DT_\lambda(\mathbf{v})) = 0 \quad (2.3.10)$$

とする. $|\mu| \neq 1$ のとき, 固定点 \mathbf{v}_0 は双曲的であるという. この双曲型固定点 \mathbf{v} は式 (2.3.10) の根すなわち特性乗数により分類できる. この分類は位相的性質を反映しており, 固定点の分岐はこの分類による固定点の性質が変化する場合に生じる [16]. 双曲型固定点のタイプは, Poincaré 写像が n 次元の場合, 位相的に異なる固定点は次の $2n$ 種類存在する.

$${}_k D^m \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad {}_k I^m \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.3.11)$$

ここで, D, I は固定点のタイプを表す. D 型固定点は, 複素平面内の実軸上の $-\infty < \mu < -1$ に位置する特性乗数の個数が偶数, I 型固定点は, 奇数であることを示す. また, 左下の添字 k は, $|\mu| > 1$ となる特性乗数の個数, すなわち固定点の不安定次元を表す. つまり, 安定な周期解は, ${}_0 D$ タイプの固定点に対応する. 右上の添字 m は m 周期点 (固定点の場合は省略) を表す.

位相的性質の変化するパラメータ値において分岐が生じるが, 一般的な余次元の分岐としては以下の 3 つが知られている. より詳細な解析については文献 [16], 余次元 2 の分岐に関しては [17] を参照.

(1) **接線分岐** (tangent bifurcation) $\mu = 1$ で起こり, 固定点対が発生・消滅する.

$$\begin{aligned} \phi &\leftrightarrow {}_{k+1} D + {}_k D & (k = 0, 1, \dots, n-1) \\ \phi &\leftrightarrow {}_{k+1} I + {}_k I & (k = 1, 2, \dots, n-2) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

(2) **周期倍分岐** (period-doubling bifurcation) $\mu = -1$ で起こり周期が倍になる.

$$\begin{aligned} {}_k D &\leftrightarrow {}_{k+1} I + 2{}_k D^2 & (k = 0, 1, \dots, n-2) \\ {}_k D + 2{}_{k+1} D^2 &\leftrightarrow {}_{k+1} I & \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

$$\begin{aligned} {}_k D &\leftrightarrow {}_{k-1} I + 2{}_k D^2 & (k = 2, 3, \dots, n) \\ {}_k D + 2{}_{k-1} D^2 &\leftrightarrow {}_{k-1} I & \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

(3) **Neimark-Sacker 分岐** 特性乗数 μ が複素平面の単位円上で起こり, 準周期解 (Poincaré 写像における不変閉曲線: ICC) が発生・消滅する.

$$\begin{aligned} {}_k D &\leftrightarrow {}_{k+2} D + ICC & (k = 0, 1, \dots, n-2) \\ {}_k D + ICC &\leftrightarrow {}_{k+2} D & \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

2.3.2 断続動作特性を有する非線形力学系にみられる分岐

一般に非線形力学系には前節で示した余次元の高い分岐が発生し、カオスも含めた様々な複雑な現象が観測される。しかし系が状態依存型断続特性を有する場合、一般のなめらかな系には発生しない次の2種類の分岐が生じる可能性がある。

1. border collision bifurcation

border collision bifurcation は、特にコンバータ回路に見られる分岐である [18]。例えば DC-DC コンバータ回路 [19] において、一定の仮定の元リターンマップを定義した場合、2 領域で各々が単調な写像が定義できる。2 領域の境目を border と呼ぶことにし、マップは border を含め連続であるが border の位置のみは不可微分であるとする。マップの周期点が border を越えると解軌道は不安定となり、周期解は他の周期解やカオスへと分岐する。周期解がカオスへといきなり分岐する過程を一方向分岐図 (図 2.3.1) およびリターンマップ (図 2.3.2, 図 2.3.3) で示す。図 2.3.2 においては 2 周期点が観測されるが、 X_{OUT} を増加させることで周期点の一部が border を跨ぎ、分岐が発生している。図 2.3.3 の f^4 からわかるように、分岐後準 4 周期が発生する [19]。この周期解が可観測カオスを呈することは、容易に理解できる。ここで、可観測カオスとは次の区間 I が存在していることである。

$$\left\{ \begin{array}{l} f(I) \subseteq I \\ \left| \frac{df}{dy_a} \right| > 1 \end{array} \right. \quad (2.3.16)$$

つまりこの解は 4 周期点のようなカオスであることがわかる。パワーエレクトロニクス回路には広くこの分岐が観測され、現在も積極的に解析がすすめられている [20]。離散系の場合、border collision bifurcation はリターンマップ上で軌道は連続だが不可微分点を持つ系に発生する。つまりこの条件を満たすには、元の連続系は、2.2 節で示した時刻・状態混合型断続特性を有する系でなければならないことがわかる。

2. 大域的分岐

本論文で述べる大域的分岐とは、一般の (なめらかな) 非線形力学系における、サドル・コネクションやセパトリクス・ループのような大域的分岐とはまったく異なる意味で使っており、運動方程式が切り替わる条件面 (局所断面) を横断していた解軌道の一部が断面に接する、もしくは解軌道が到達する局所断面の順番が変化する事により解軌道が消滅する分岐である。区分線形系においてはヒステリシス特性を持つ回路 [4] やヒステリシスニューラルネットにおける平衡点の追い抜き [21] など大域的分岐の典型的な例である。本論文においても第 3 章、第 5 章において状態依存型断続特性を持つ線形・非線形系の例を示し、大域的分岐についても計算方法を述べる。一般に大域的分岐は、状態依存型断続特性、時刻・状態混合型断続特性を有する系に広く発生する分岐であると考えられる。

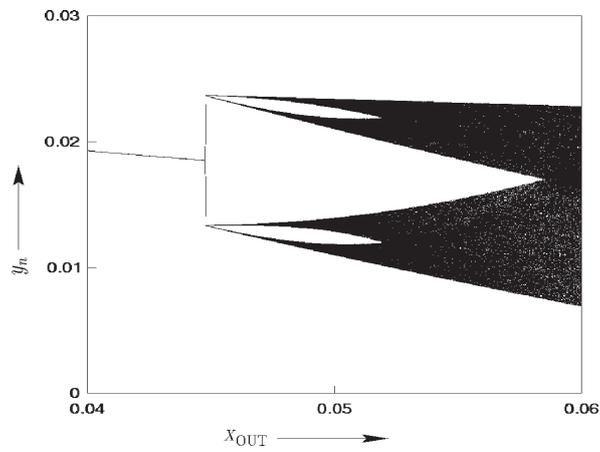
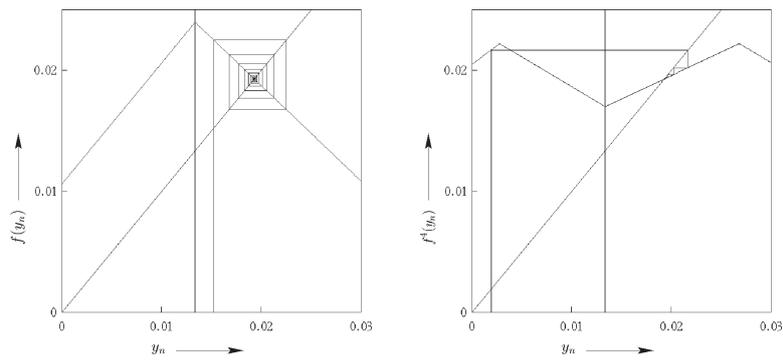
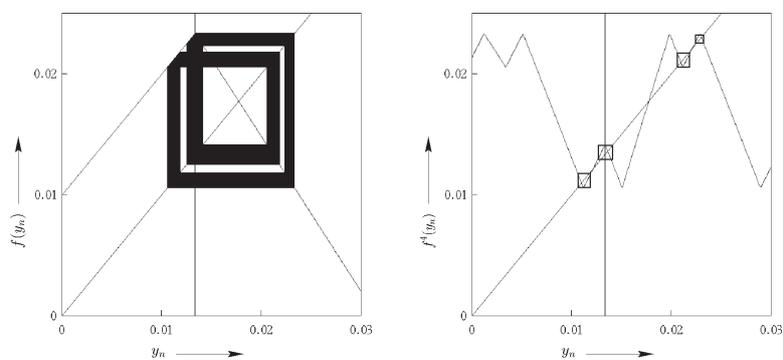


図 2.3.1 一方向分岐図

図 2.3.2 固定点 ($X_{OUT} = 0.04$)図 2.3.3 準 4 周期 ($X_{OUT} = 0.051$)

2.4 断続動作特性を有する非線形力学系のカオス制御

2.4.1 カオス制御

近年、カオスの工学的応用として、カオス制御が注目されている [22]. カオスアトラクタは、不安定な周期軌道を無限に内包しており、そのうちの一つの軌道 (ターゲット) を選び出し、安定化する問題をカオス制御と呼んでいる. 制御アルゴリズムの多くは、ターゲットに関する軌道や固定点/周期点の情報を何らかの形で得て、制御則を構成しておき、カオスアトラクタ内をさまよう軌道が、ターゲット軌道近傍に近付いたとき、はじめて制御を施すというものである.

Chen, Dong, および Pyragas [23] らは、ターゲットとカオス軌道との誤差をフィードバックした. この制御は、系のパラメータは摂動させないので理想的な制御であるが、連続量をフィードバックしなければならないため、ターゲットの軌道情報 (波形) を全て入手する必要がある. また、次元が高いと実装が困難である. 一方、離散系 (差分方程式系) では Otto, Grebogi, York らによる安定化手法 [24] が一般に知られている. この方法は、ターゲットがサドル型であるとき、安定多様体方向に軌道を乗せて、ターゲットに漸近させるパラメータ摂動制御である. OGY 法を用いると、即応性は多少犠牲にしても、カオスアトラクタに埋め込まれたどの不安定周期軌道も非常に小さなフィードバック値で安定化することが理論的に可能となる. システム理論の観点からみれば、目的の周期軌道の近傍まで状態を近づけるために、カオスの性質を利用した点に、OGY 法の新規性があるといえる. 連続系においては、サンプリングによる離散化を図ることでこの手法が利用可能となる. 多くの (回路実装を含めた) 報告では、カオス時系列からリターンマップを構成し、ターゲットまわりの安定性を幾何学的に求めている. ターゲットがサドル型でなければ制御が可能でないという欠点はあるものの、数学モデルを必要としないので、回路や実験系で広く用いられている. 本論文では断続動作特性を有する力学系の安定化制御、安定な平衡点・周期軌道の不安定化制御に注目し制御法を提案する.

2.4.2 断続動作特性を有する力学系の安定化制御

断続動作特性を有する力学系は 2.2 節で述べたように分類できる. 区分線形系に対しては、文献 [5] [25] [26] [27] において **case a.2** におけるカオス制御が行われている. 基本的にこれらの手法は、Hunt によって提案された [28] 線形近似を必要としない制御法 (Occasional Proportional Feedback) を応用している. この手法は理論的裏付けは不十分であるが、実装が容易であるためレーザー光発生系における不安定振動の高周波安定などに適用されている [29]. カオス制御への要求事項としては [30]:

1. 系にカオスが発生し、カオスは不安定周期軌道の近傍を訪問する (可観測カオスの厳密証明).
2. 制御目標である不安定周期軌道の計算.
3. 精密かつ高速な不安定周期軌道の安定化.
4. 3. の簡素な実装化.

であり、文献 [5] [25] [26] [27] において Occasional Proportional Feedback を用いた狙いは 3. 4. つまり制御法が Robust であり VLSI 化や応用に適した実装ができるためである. 1. 2. は区分線形系ゆえに厳

密解が計算できるため比較的容易に計算可能である。これらカオス制御への要求事項を文献 [5] [25] [27] はほぼ満たしており、非常に興味深い。さらに、文献 [26] で一般的な区分線形系における手法へのアプローチがなされている。しかしこれらは限られた系への応用であり、個々の問題としては解析手法が確立されているが、どのような系にでも適用できるわけではない。そこで、本論文では任意の断続動作特性を有する非線形力学系に適用可能であるカオスの一制御法を第 7 章で提案する。

2.4.3 安定な平衡点・周期軌道の不安定化制御

これまでのカオス制御に関する報告の多くは、2.4.1 節で述べた目標となる不安定軌道の安定化が目的であり、安定な平衡点・周期軌道を不安定化させ、カオスを発生させるという逆の視点の発想はまったくなされていない。本論文では、安定な軌道を不安定化することを考える。2次元自律系において、解軌道は一般に安定平衡点や安定なリミットサイクルに落ち着き、決してカオスアトラクタがみられることはない。われわれはカオス制御の手法を逆利用して、安定な平衡点や周期軌道を不安定化させる手法を第 6 章で提案する。周期軌道に対しては Poincaré 写像による差分方程式の固定点を不安定化し、安定平衡点に対しては平衡点周りの安定性を極配置法で操作し、カオスを発生させる。とりわけ、振動的要素の無い勾配系においてもこの手法によりカオスを作り出せることは興味深い。このように、従来のカオス制御と何ら変わらない手法によって次の新しい応用が考えられる。

- 安定平衡点、及び安定なリミットサイクルの固定点の不安定化により、本来カオスの発生しない 2 次元自律系においてカオスを発生させることができる。
- 非線形最小化問題における local minimum のからの脱出などへの応用。

第 3 章

結合した 2 つの方形波発振器に生じる周期解の解析

3.1 まえがき

日常において、様々なところでリズム運動が観測される。化学・リズムを持つ生物系の協調・共同動作は広く同期現象と呼ばれ、身の回りに見られる興味深い非線形現象の 1 つである。化学系における、ペットボトルをストローで結合したペットボトル発振器の同期 [31]、生物系における草地で合唱するコウロギや、河辺でのホタルの集団発光、ヒトの睡眠-覚醒覚醒などの同期現象は自然界での典型的な例である [32]。その同期現象を解析する手法の一つとして結合発振器を用いたモデル化があり、睡眠・覚醒モデル [33]- [35]、生体系に生ずる同期現象のモデル [36] や人工神経セルのモデル [37] などが挙げられる。

本章では、ホタルの集団発光の模擬、メカニズムの解明を行うため、電子ホタル (以下 EFF) 回路を提案し解析を行なう。ホタルの発光のリズムは、発振器としては最も簡単な方形波発振器で実現する。発振器間の相互結合は、フォトダイオードとフォトトランジスタを組み合わせたフォトカップラーを用いることで容易に実現可能である。EFF 回路は、フォトダイオードの発光のリズムに影響を受けしきい値が切り替わる 1 次元線形微分方程式で記述できる。EFF 回路の結合系は 4 つの半平面で定義される合成力学系であり、ダイナミクスは簡単な数学モデルによって記述できる。システムの振る舞いは、ビリヤード問題における境界が平行移動する玉突き問題となっている。

電気系においてもこの種の回路は合成力学系の問題として 2, 3 解析が行なわれている。文献 [38] ではニューラル発振器について述べられており、解析的手法を用いてシステムのカオスの存在領域およびフラクタル応答について解析が行なわれている。文献 [39] では周期的にしきい値が切り替わるヒステリシス発振器の解析が同様の方法で解析され、広い範囲に存在する代表的な周期解の 2 次元分岐図およびヒステリシス特性を含むカントール集合の存在について述べられている。

EFF 回路は上記のモデルより複雑な構成になっており、スイッチング条件も異なっている。詳細にシステムの特性を解析するため、1 次元リターンマップを厳密に導出する。2 つのまったく同じ EFF 回路を結合させた場合、完全に同相で同期する。われわれは、この現象を回路実装で模擬し、リターンマップを用い厳密に証明を行なった。それぞれの EFF 回路が異なったパラメータをもつ場合、ヒステリシス特性を含む様々な周期解が存在しているが、フォトダイオードの発光を利用し switching rate γ を利用しこ

れらを分類し、いくつかの γ に対応した 2 次元分岐図を示す。これらの結果の一部は実際の回路においても確認される。

このような簡素なモデルは回路実装が容易であり、区分解系ゆえに厳密解を導出できる。つまり実験的・数学的な解析が比較的容易なため、生体系・物理系に生ずる非線形現象の理解に貢献できると考えられる。

3.2 EFF 回路

図 3.2.1 に EFF 回路を示す。EFF 回路はフォトダイオード、フォトトランジスタを含む方形波発振器により構成されている。ここで、フォトトランジスタにダイオードを接続して、負の電圧が加わったときフォトトランジスタに電流が流れないようにしていることに注意する。フォトトランジスタが OFF の場合、回路方程式は次式で表される。

$$\begin{cases} R_2 C \frac{dv}{dt} + v = v_0 \\ v_+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_0 = \alpha v_0 \\ v_0 = E \operatorname{sgn}(v_+ - v) = E \operatorname{sgn}(\alpha v_0 - v) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

ここで $\operatorname{sgn}(\cdot)$ は符号関数である。

式 (3.2.1) の時間 t および電圧 v を、

$$\tau = \frac{1}{R_2 C} t, \quad x = \frac{v}{E} \quad (3.2.2)$$

と変換すると、式 (3.2.1) は次式に正規化される。

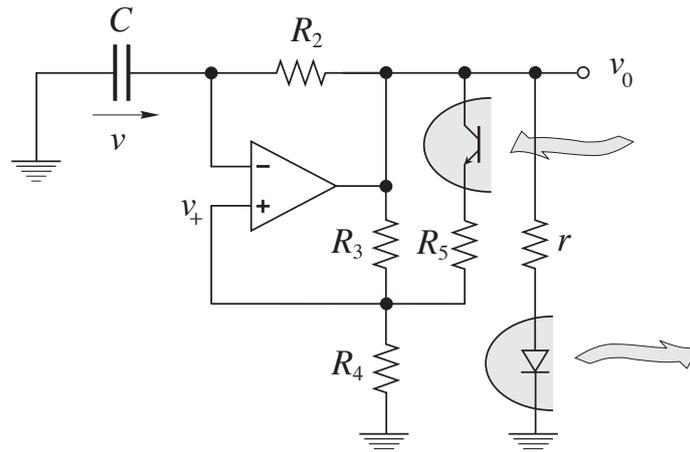


図 3.2.1 EFF 回路 (フォトカップラーを含む方形波発振器)。

$$\frac{dx}{dt} = -x \pm 1 \quad (3.2.3)$$

このとき方形波発振器の周期 σ は次式で示される.

$$\sigma_\alpha = 2 \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad (3.2.4)$$

$$f_\alpha = \frac{1}{\sigma_\alpha} \quad (3.2.5)$$

フォトトランジスタが ON の場合, v_+ および周期 σ_β は:

$$v_+ = \frac{R_3 R_4 + R_4 R_5}{R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5} v_0 = \beta v_0 > \alpha v_0 \quad (3.2.6)$$

$$\sigma_\beta = 2 \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (3.2.7)$$

であり, フォトトランジスタが ON と OFF のとき周期は次の関係がある.

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = 2 \left(\log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) = 2 \log \frac{(1+\alpha)(1-\beta)}{(1+\beta)(1-\alpha)} < 0 \quad (3.2.8)$$

つまり, フォトトランジスタが ON の場合, OFF の場合に比べ発振周波数が低くなる事が分かる.

3.3 結合 EFF 回路

図 3.2.1 の EFF 回路を 2 個結合した場合の同期現象について考える (図 3.3.1 参照). 方形波発振器の出力の発振周波数はもう一方の EFF 回路の光学的な入力信号によって制御される. フォトダイオードの発光はホタルの発光と考えることができる.

式 (3.2.3) を次式で書き直す.

$$\frac{dv}{dt} = -v + e \quad (e = -1 \text{ or } 1, v_+ = \pm\alpha \text{ or } \beta) \quad (3.3.1)$$

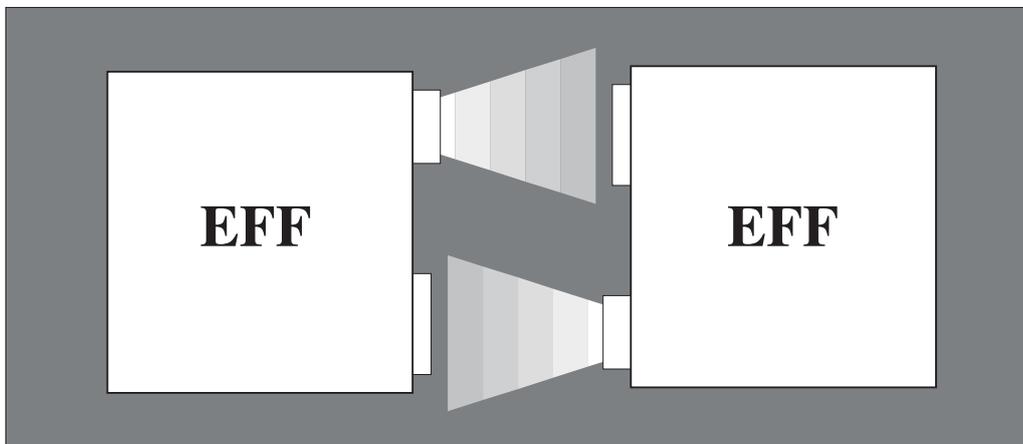


図 3.3.1 結合 EFF 回路.

ここで、 e は EFF 回路のオペアンプの出力電圧を意味している。結合した EFF 回路の回路方程式は次式で示される。

$$\begin{cases} dv_1/dt = -v_1 + e_1 \\ \quad (e_1 = -1 \text{ or } 1, v_{+1} = \pm\alpha_1 \text{ or } \beta_1) \\ dv_2/dt = -v_2 + e_2 \\ \quad (e_2 = -1 \text{ or } 1, v_{+2} = \pm\alpha_2 \text{ or } \beta_2) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

v_1, v_2 は各々の EFF 回路のキャパシタ電圧を示す。式 (3.2.8) より、式 (3.3.2) は次の関係をもつ。

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < 1, \quad 0 < \alpha_2 < \beta_2 < 1 \quad (3.3.3)$$

図 3.3.2 に $v_i(t)$ および e_i ($i=1, 2$) の例を示す。式 (3.3.2) は 1 次の線形微分方程式で記述されるため、区分的に厳密解が導出可能である。系の時定数が等しいため解から t に関する項を消去できるため、 v_1 - v_2 平面における解軌道は直線となる。(図 3.3.3, 図 3.3.4, 図 3.3.5 および図 3.3.6 参照) 結合した EFF 回路において、以下に特徴を列挙する。

- オペアンプの出力電圧は式 (3.3.2) の記述を用いると次式で示される。

$$e_i = \text{sgn}(v_{+i} - v_i) \quad (i = 1, 2) \quad (3.3.4)$$

ここで、オペアンプの出力が共に 1 であったときのみフォトトランジスタのスイッチは両方とも ON となり、一方でオペアンプの出力が -1 であると、フォトトランジスタのスイッチは両方 OFF となる。したがって、オペアンプの出力 e_1, e_2 が共に 1 であったときのみしきい値 v_{+i} はそれぞれ $v_{+i} = \alpha_i$ から β_i ($i=1, 2$) へと切り替わり、その他の場合、 $v_{+i} = \alpha_i$ ($i=1, 2$) となる。

- 解軌道が $v_1 = \beta_1, \alpha_2 \leq v_2 \leq \beta_2$ もしくは $v_2 = \beta_2, \alpha_1 \leq v_1 \leq \beta_1$ となった瞬間、オペアンプの出力電圧はそれぞれ $(e_1, e_2) = (1, 1)$ から $(-1, -1)$ へと切り替わる。つまり、この場合のみオペアンプの出力電圧が同時に切り替わる。

以降の解析のために、次の 4 つの半平面を定義する。

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv \{(v_1, v_2, e_1, e_2) | -\alpha_1 \leq v_1, v_2 \leq \beta_2, e_1 = -1, e_2 = 1\} \\ P_2 &\equiv \{(v_1, v_2, e_1, e_2) | -\alpha_1 \leq v_1, -\alpha_2 \leq v_2, e_1 = -1, e_2 = -1\} \\ P_3 &\equiv \{(v_1, v_2, e_1, e_2) | v_1 \leq \alpha_1, -\alpha_2 \leq v_2, e_1 = 1, e_2 = -1\} \\ P_4 &\equiv \{(v_1, v_2, e_1, e_2) | v_1 \leq \beta_1, v_2 \leq \beta_2, e_1 = 1, e_2 = 1\} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

式 (3.3.5) の定義を用いれば、式 (3.3.2) はオペアンプの出力によって決定される 4 つの半平面上を動く解軌道が存在し、オペアンプの出力の変化によって半平面が切り替わる系とみなせる。ここで状態 v_1, v_2 によってオペアンプの出力の切り替わりが起きることに注意する。

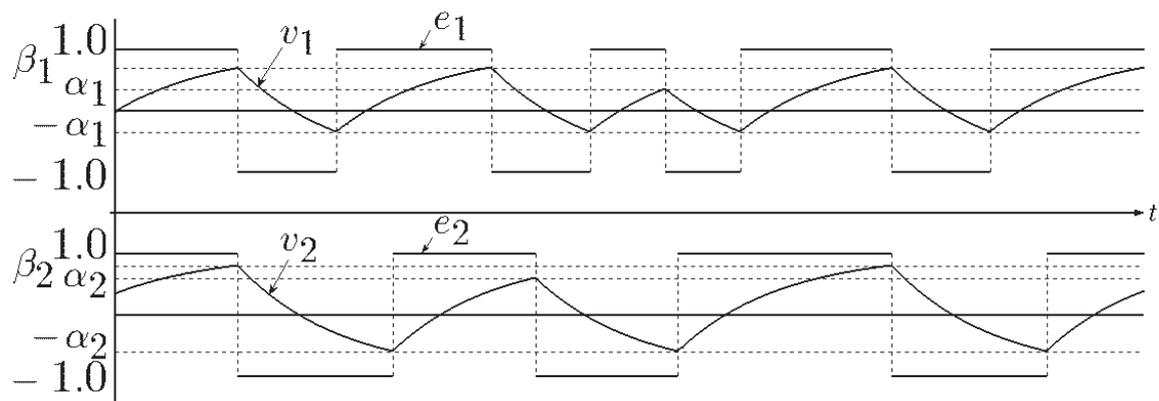


図 3.3.2 波形 ($\alpha_1=0.35, \alpha_2=0.6, \beta_1=0.7, \beta_2=0.8$).

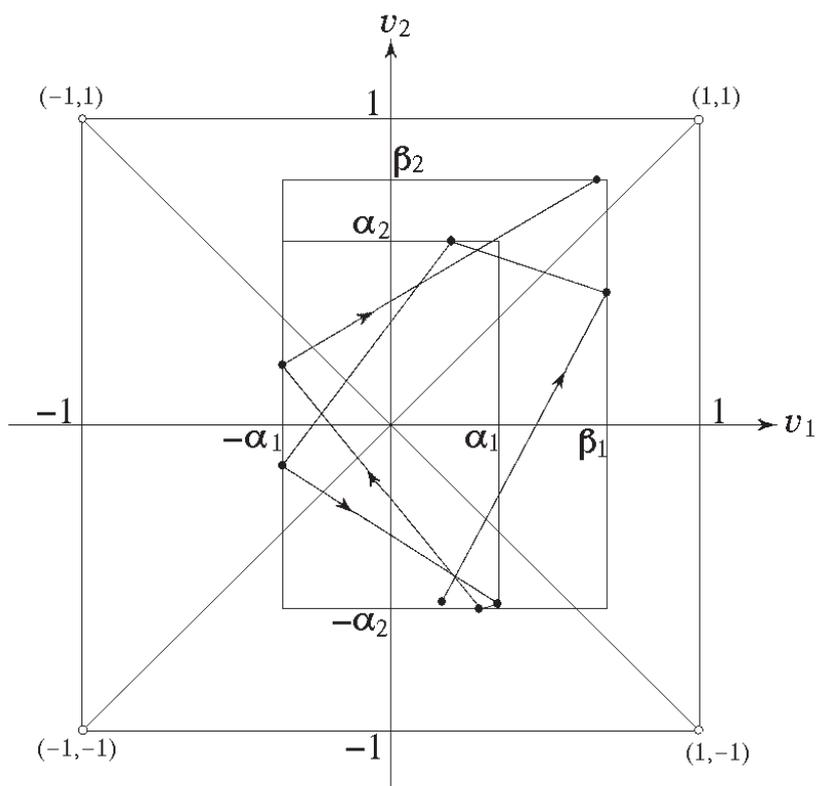


図 3.3.3 EFF 回路の状態平面図の例.

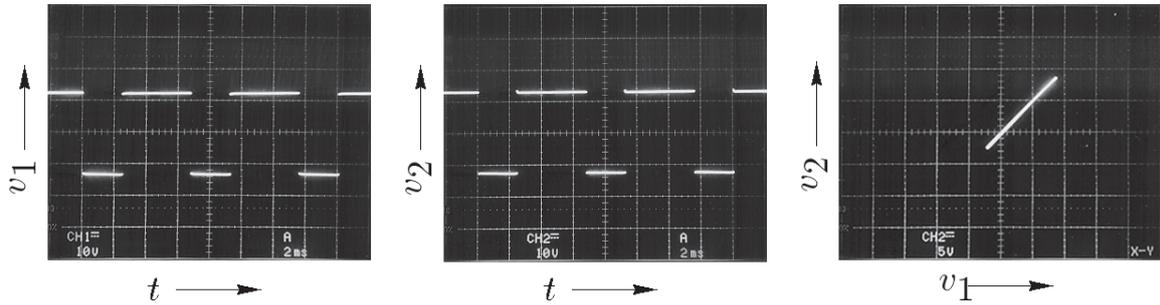


図 3.3.4 回路実装 1. $\alpha_1 \simeq 0.2$, $\beta_1 \simeq 0.7$ ($R_1 \simeq 10$ [k Ω], $R_2 \simeq 10$ [k Ω], $R_3 \simeq 10$ [k Ω], $R_4 \simeq 2.4$ [k Ω], $R_5 \simeq 1.2$ [k Ω], $r \simeq 100$ Ω), $\alpha_2 \simeq 0.2$, $\beta_2 \simeq 0.8$ ($R_1 \simeq 10$ [k Ω], $R_2 \simeq 10$ [k Ω], $R_3 \simeq 10$ [k Ω], $R_4 \simeq 2.4$ [k Ω], $R_5 \simeq 680$ Ω , $r \simeq 100$ Ω), (波形:2[ms/div], 10[V/div], 状態平面図:5[V/div], 5[V/div]).

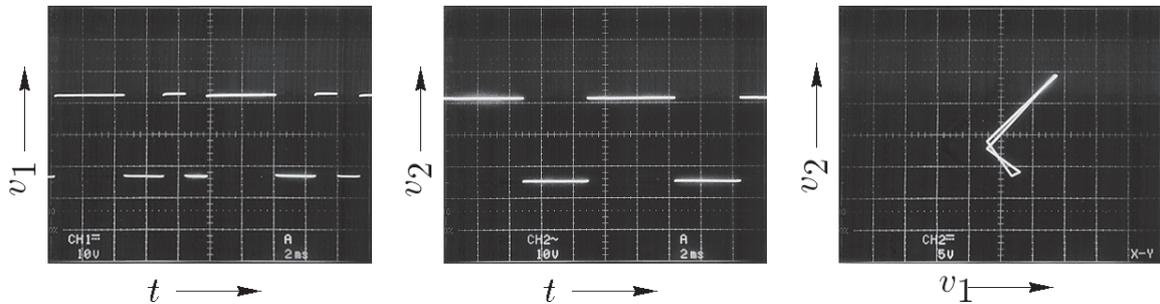


図 3.3.5 回路実装 2. $\alpha_1 \simeq 0.2$, $\beta_1 \simeq 0.7$ ($R_1 \simeq 10$ [k Ω], $R_2 \simeq 10$ [k Ω], $R_3 \simeq 10$ [k Ω], $R_4 \simeq 2.4$ [k Ω], $R_5 \simeq 1.2$ [k Ω], $r \simeq 100$ Ω), $\alpha_2 \simeq 0.5$, $\beta_2 \simeq 0.8$ ($R_1 \simeq 10$ [k Ω], $R_2 \simeq 10$ [k Ω], $R_3 \simeq 10$ [k Ω], $R_4 \simeq 10$ [k Ω], $R_5 \simeq 3.3$ [k Ω], $r \simeq 100$ Ω), (波形:2[ms/div], 10[V/div], 状態平面図:5[V/div], 5[V/div]).

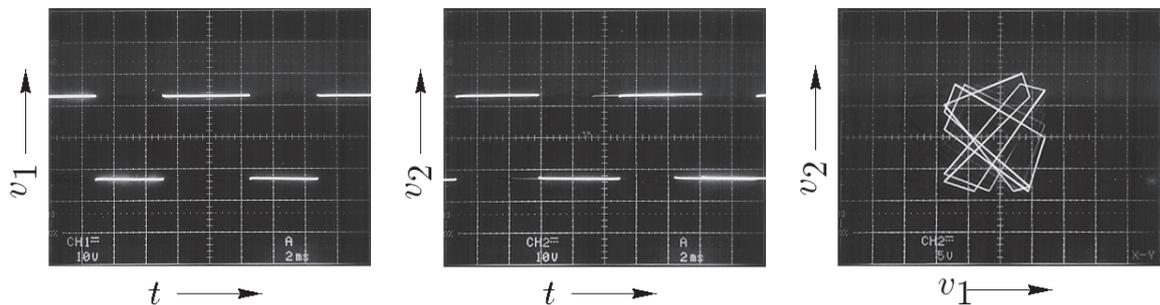


図 3.3.6 回路実装 3. $\alpha_1 \simeq 0.5$, $\beta_1 \simeq 0.7$ ($R_1 \simeq 10$ [k Ω], $R_2 \simeq 10$ [k Ω], $R_3 \simeq 10$ [k Ω], $R_4 \simeq 10$ [k Ω], $R_5 \simeq 7.5$ [k Ω], $r \simeq 100$ Ω), $\alpha_2 \simeq 0.65$, $\beta_2 \simeq 0.8$ ($R_1 \simeq 10$ [k Ω], $R_2 \simeq 10$ [k Ω], $R_3 \simeq 10$ [k Ω], $R_4 \simeq 18.4$ [k Ω], $R_5 \simeq 9.1$ [k Ω], $r \simeq 100$ Ω), (波形:2[ms/div], 10[V/div], 状態平面図:5[V/div], 5[V/div]).

3.4 リターンマップ F

式 (3.3.2) は区分線形系であるため, 結合した EFF 回路の解は解析的に導出可能であり, 文献 [38], [39] の手法を拡張することで 1 次元リターンマップを厳密に導出できる. 1 次元リターンマップを定義するために, 幾つかの対象を定義する.

$$\begin{aligned}
I_{10} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid -\alpha_1 \leq v_1 \leq \beta_1, v_2 = -\alpha_2, (v_1, v_2) \in P_1\} \\
I_{20} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid v_1 = \beta_1, -\alpha_2 < v_2 \leq \beta_2, (v_1, v_2) \in P_1\} \\
I_{30} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid -\alpha_1 \leq v_1 < \beta_1, v_2 = \beta_2, (v_1, v_2) \in P_3\} \\
I_{40} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid v_1 = -\alpha_1, -\alpha_2 < v_2 < \beta_2, (v_1, v_2) \in P_3\} \\
I_{11} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid -\alpha_1 \leq v_1 \leq \alpha_1, v_2 = -\alpha_2, (v_1, v_2) \in P_4\} \\
I_{21} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid v_1 = \alpha_1, -\alpha_2 < v_2 \leq \beta_2, (v_1, v_2) \in P_2\} \\
I_{31} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid -\alpha_1 < v_1 \leq \beta_1, v_2 = \alpha_2, (v_1, v_2) \in P_2\} \\
I_{41} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid v_1 = -\alpha_1, -\alpha_2 \leq v_2 < \alpha_2, (v_1, v_2) \in P_4\} \\
I_{51} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid v_1 = \beta_1, \alpha_2 \leq v_2 \leq \beta_2, (v_1, v_2) \in P_2\} \\
I_{61} &\equiv \{(v_1, v_2) \mid \alpha_1 \leq v_1 \leq \beta_1, v_2 = \beta_2, (v_1, v_2) \in P_2\} \\
T_1 &= I_{10} \cup I_{20} \cup I_{30} \cup I_{40}, \\
T_2 &= I_{11} \cup I_{21} \cup I_{31} \cup I_{41} \cup I_{51} \cup I_{61}
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

T_1 から出発した解は T_2 を通り必ず T_1 に戻って来る. 故に次の写像が定義できる.

$$\begin{aligned}
f_1 : T_1 &\rightarrow T_2 \\
f_2 : T_2 &\rightarrow T_1 \\
f : T_1 &\rightarrow T_1 \quad f = f_2 \circ f_1
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

したがって, T_1 上を打つ解軌道の履歴をリターンマップとして構成すればよい. 更に次の変換を定義する.

$$\begin{aligned}
\psi : T &\rightarrow S^1 \\
(v_1 \text{ or } v_2) &\rightarrow x
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

ここで, $S^1 = \{x \in \mathbf{R} \bmod 1\}$ 及び

$$x = \begin{cases} \frac{\alpha_1 + v_1}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)} & \text{for } v_1 \in I_{10} \\ \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + v_2}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)} & \text{for } v_2 \in I_{20} \\ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta_1 + \beta_2 - v_1}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)} & \text{for } v_1 \in I_{30} \\ \frac{2(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2) + \alpha_2 - v_2}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)} & \text{for } v_2 \in I_{40} \end{cases} \tag{3.4.4}$$

次式を用い、リターンマップ F を定義する.

$$F \equiv \psi \circ f \circ \psi^{-1} : S^1 \rightarrow S^1 \quad (3.4.5)$$

その結果、式 (3.3.2) のダイナミクスは次式に示す離散写像の振る舞いによって解析可能となる.

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (3.4.6)$$

図 3.3.2 に対応するリターンマップ F を図 3.4.1 に示す. 図 3.4.1 の D_1 および D_2 はそれぞれ次式で示される.

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 + 2\alpha_2}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)} \\ D_2 &= \frac{\alpha_2 + 2\beta_1 + \beta_2}{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

さらに、 D_3 および D_4 は次の関係を持つ.

- $D_3 \equiv D_3$ から出発した解軌道が $(v_1, v_2) = (-\alpha_1, \alpha_2)$ を通る $I_{10} \cup I_{20}$ 上の点.
- $D_4 \equiv D_4$ から出発した解軌道が $(v_1, v_2) = (\alpha_1, -\alpha_2)$ を通る $I_{30} \cup I_{40}$ 上の点.

次式を満たすとき x_p を n 周期点と呼ぶ.

$$F^n(x_p) = x_p, F^k(x_p) \neq x_p \quad (k < n) \quad (3.4.8)$$

定理 1 F は固定点を持たない.

証明: F が固定点を持つには、次の 4 つの変換が考えられる.

$$\text{case1: } I_{10} \rightarrow I_{31} \rightarrow I_{10}$$

$$\text{case2: } I_{20} \rightarrow I_{41} \rightarrow I_{20}$$

$$\text{case3: } I_{30} \rightarrow I_{11} \rightarrow I_{30}$$

$$\text{case4: } I_{40} \rightarrow I_{21} \rightarrow I_{40}$$

ここでは、**case1** の場合のみ示す. 初期値 $x_0 \in I_{10}$ は $x_1 \in I_{31}$ に変換され、再び x_1 は $x_2 \in I_{10}$ に変換される. この関係を次式に示す.

$$x_2 = \frac{(\alpha_2 - 1)^2}{(\alpha_2 + 1)^2}(x_0 + 1) - 1 \quad (3.4.9)$$

このとき、 $x_2 < x_1 < x_0$ となるため、 F は固定点を持たない. 他の **case** も同様に証明可能である. \square

3.5 解析

まず、2 つの EFF 回路が同じパラメータを持つ場合を考える ($\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$).

定理 2 2 つのまったく同じ EFF 回路が結合しているとき、EFF 回路の発光のリズムは同相で同期して

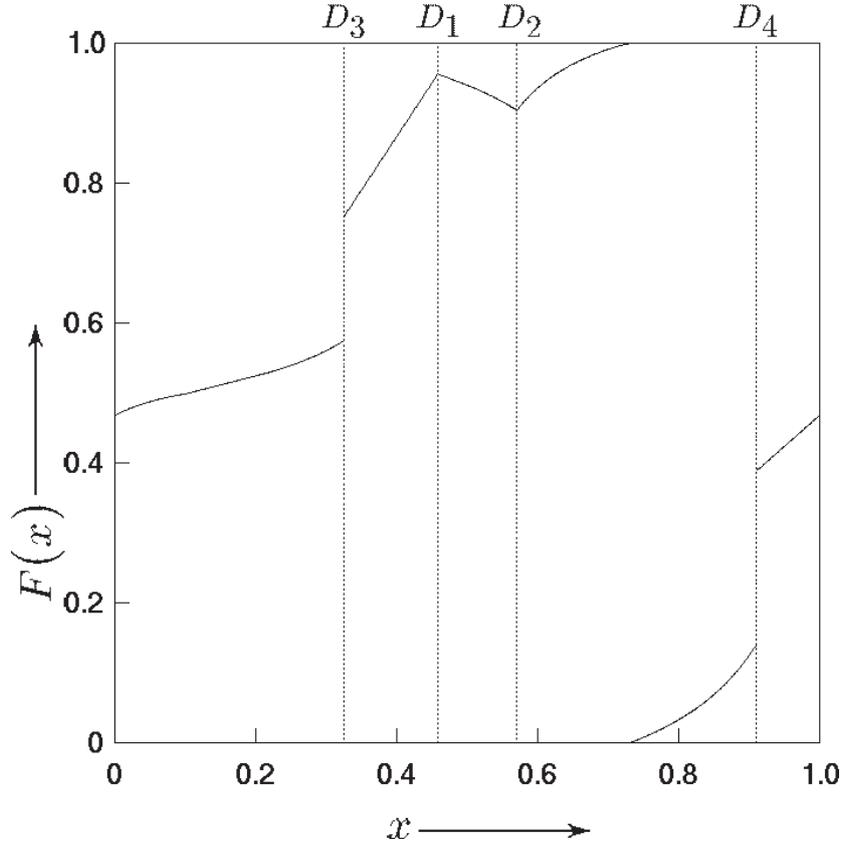


図 3.4.1 リターンマップ ($\alpha_1=0.35, \alpha_2=0.6, \beta_1=0.7, \beta_2=0.8$).

いる.

証明 $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2, \beta = \beta_1 = \beta_2$ と仮定する. 初期値 $x_a \in I_{10}$ ならば, F^2 もしくは F^4 を用いた次の3つの場合が考えられる.

$$\text{case1}(F^4): \quad x_a \in I_{10} \rightarrow x_b \in I_{41} \rightarrow x_c \in I_{30} \rightarrow x_d \in I_{61} \rightarrow \\ x_e \in I_{40} \rightarrow x_f \in I_{11} \rightarrow x_g \in I_{20} \rightarrow x_h \in I_{51}$$

$$\text{case2}(F^4): \quad x_a \in I_{10} \rightarrow x_b \in I_{41} \rightarrow x_c \in I_{30} \rightarrow x_d \in I_{21} \rightarrow \\ x_e \in I_{40} \rightarrow x_f \in I_{11} \rightarrow x_g \in I_{20} \rightarrow x_h \in I_{51}$$

$$\text{case3}(F^2): \quad x_a \in I_{10} \rightarrow x_b \in I_{41} \rightarrow x_c \in I_{30} \rightarrow x_d \in I_{21}$$

これらは次式で厳密に記述可能である.

case1:

$$g(v_1) = \frac{(\alpha - 1)(\beta + 1)(2(\alpha - 1) - (\beta - 1)(v_1 + 1))}{4(\alpha - 1) - 2(\beta - 1)(v_1 + 1) + (\alpha - 1)(\beta + 1)(\beta - 1)} - 1, \quad (\alpha < v_1 < B_1) \quad (3.5.1)$$

case2:

$$g(v_1) = -\frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1)(\beta + 1)(v_1 + 1)}{2(\alpha + 1)(v_1 + 1) - (\alpha - 1)^2(\beta + 1)} - 1, \quad (B_1 < v_1 < B_2) \quad (3.5.2)$$

case3:

$$g(v_1) = \frac{(\alpha + 1)(\beta - 1)}{(\alpha - 1)(\beta + 1)}(v_1 + 1) - 1, \quad (B_2 < v_1 < \alpha) \quad (3.5.3)$$

ここで B_1 , B_2 はそれぞれ次式で示される.

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{(\alpha - 1)^2}{\beta - 1} - 1 \\ B_2 &= -\frac{(\alpha - 1)^2(\beta + 1)}{(\alpha + 1)(\beta - 1)} - 1 \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

したがって, 式 (3.5.1)-式 (3.5.3) を用いリターンマップ G が定義できる.

$$G \equiv \psi \circ g \circ \psi^{-1} : S^1 \rightarrow S^1 \quad (3.5.5)$$

S^1 上の差分方程式は式 (3.4.6) の F を G に置き換えることにより与えられる. 任意の case において, 初期値 $x_0 \in I_{10}$ は $x_1 = G(x_0) \in I_{10}$ よりも大きな値 $x_0 > x_1$ を取る. つまり, $x_0 \in I_{10}$ から出発した解軌道は必ず case1 に含まれる. case1 の安定固定点は $x=0$ であり, $(v_1, v_2) = (-\alpha, -\alpha)$ に等しい. これは, EFF 回路間の発光のリズムは, 同相で同期していることを示している. □

次に, 2 つの EFF 回路が異なるパラメータを持つ場合を考える ($\alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2$). パラメータ β が異なる場合においても, α が同じパラメータを持つ場合, EFF 回路の発光のリズムは同相で同期する. この場合の例を図 3.3.4 に示す. 周期軌道を分類するため, switching rate γ を定義する.

$$\gamma = \frac{\text{The number of } e_2 \text{ pulses}}{\text{The number of } e_1 \text{ pulses}} \quad \text{for } t \rightarrow \infty \quad (3.5.6)$$

γ は 1 次元リターンマップ上では次の関係と一致する.

$$\gamma = \frac{\text{The number of } x_{n+1} < x_n}{\text{The number of } x_{n+1} > x_n} \quad \text{for } t \rightarrow \infty \quad (3.5.7)$$

このとき, 次のことが知られている.

1. γ は存在し, その値は初期値 x に依存する.
2. F が安定な周期軌道を持つとき, γ は有理数となる.

性質: もし, $\gamma = n/m$ ならば, オペアンプの出力のスイッチングは $m+n$ 回発生する. このとき F は $(m+n)/2$ 周期点であり, v_1-v_2 平面上において解軌道は $m+n$ 回いきい値と交わる. これは, F が 2 回のオペアンプの出力の切り替わりを 1 周期とみなしていることを意味している. 図 3.5.1 に $\gamma=2/4$ つまり 3 周期解の状態平面を示す. ここで, $v_1=\beta_1, \alpha_2 \leq v_2 \leq \beta_2$ では, オペアンプの出力電圧 e_i ($i=1, 2$) が $(1, 1)$ から $(-1, -1)$ へと同時に切り替わる. 図 3.5.2 に $\alpha_2 = 0.7, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.8$ の switching rate の例を示す. この図より, パラメータを変化させることで多くの周期解が観測できることがわかる. もし $\alpha_2 < \alpha_1$ ならば, $\gamma \geq 1$, $\alpha_1 < \alpha_2$ ならば, $\gamma \leq 1$ である. γ が無理数の場合, F が非周期的な場合も存在する.

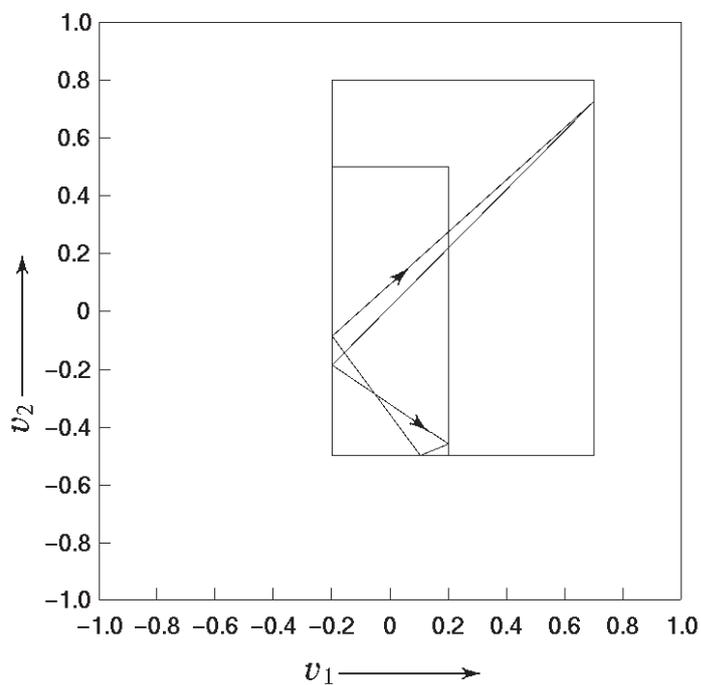


図 3.5.1 状態平面図 03131 の例. ($\alpha_1=0.2, \alpha_2=0.5, \beta_1=0.7, \beta_2=0.8$).

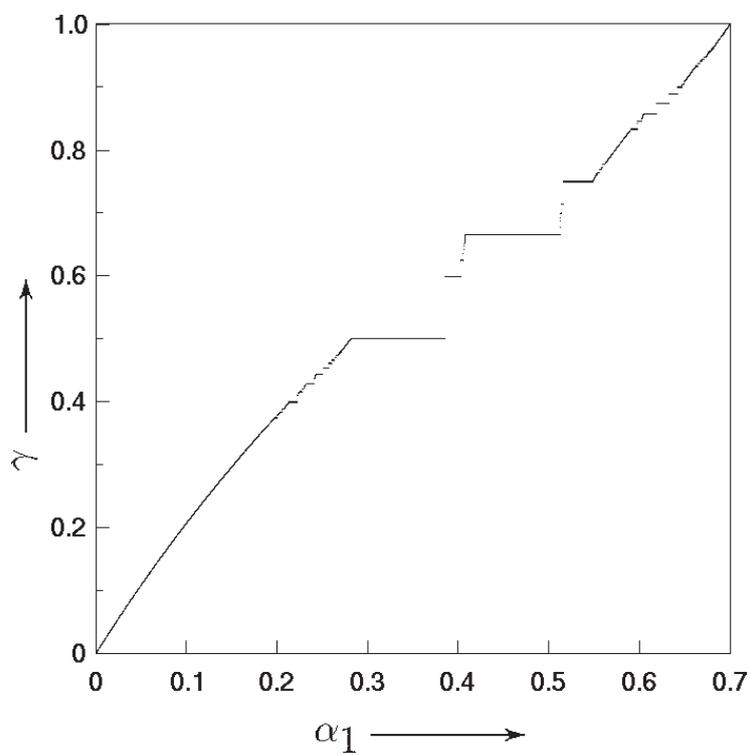


図 3.5.2 α_1 - γ 特性. $F^n(x), \gamma$ の計算の際, $n=3000$ とした.

以後、次のパラメータ範囲に注目する:

$$T_{3-i} > \log \frac{1 + \alpha_{3-i}}{1 - \alpha_{3-i}}, \quad \text{where} \quad T_i = \log \frac{1 + \beta_i}{1 - \beta_i} \quad (i = 1, 2) \quad (3.5.8)$$

ここで、EFF 回路 のオペアンプの出力電圧が変化する度に、 $T_i = 0$ と初期化する。これは、 γ が $2/n$ もしくは $n/2$ の場合に一致している。 F が安定な $n+1$ 周期点を持つとき、 v_1-v_2 平面上において解軌道は $2(n+1)$ 回しきい値と交わる。図 3.5.3 に α_1 を変化させた場合の γ を示す。ヒステリシス特性を含み、この特性が再帰的に繰り返されていることがわかる。より詳細な情報を得るために、解軌道のスイッチングの切り替わりの情報を用いて周期点を分類する。

定義:

$$\omega(v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } (v_1, v_2) \in I_{10} \text{ or } I_{11} \\ 1 & \text{for } (v_1, v_2) \in I_{20} \text{ or } I_{21} \\ 2 & \text{for } (v_1, v_2) \in I_{30} \text{ or } I_{31} \\ 3 & \text{for } (v_1, v_2) \in I_{40} \text{ or } I_{41} \end{cases} \quad (3.5.9)$$

条件式 (3.5.8) を満たすとき、式 (3.3.2) の解軌道は、以下に示すように全て列挙可能である。 $\gamma=2/2n$ は $031(31)^{n-1}$, $301(31)^{n-1}$, $032(31)^{n-1}$, $302(31)^{n-1}$ のいずれかを周期解として持ち、 $\gamma=2n/2$ は $(02)^{n-1}031$, $(02)^{n-1}301$, $(02)^{n-1}032$, $(02)^{n-1}302$, のいずれかを解軌道として持つ。この数列は、周期解が $\omega(v_1, v_2)$ を打った履歴を並べたものである。図 3.3.5, 図 3.5.1 および図 3.5.4 に 03131 に対応した波形および状態平面図を示す。この数列 03131 は $\gamma = 4/2$ の一種である。 $\gamma = 2/(n-1)$ および $\gamma = 2/n$ のパラメータ領域は、類似した構造を持っており、任意の n に関して一部重なりあっている。そのような領域においては、解軌道が共存し、どちらの解軌道に落ち着くかは完全に初期値に依存する。図 3.5.5 に、 $\gamma = 2/2$ および $2/4$ のリターンマップの例を示す。

安定な固定点は $(v_1, v_2) = (\beta_1, \alpha_2)$ もしくは (α_1, β_2) で消滅する。図 3.5.6 に $x - F^2(x)$ 平面で構成したリターンマップおよび波形を示す。図 3.5.6(b) を境界に、図 3.5.6(a) と図 3.5.6(c) では完全に異なった状態をもつ。図 3.5.6(a) において、オペアンプの出力は $(e_1, e_2) = (1, 1)$ から $(e_1, e_2) = (-1, -1)$ へと切り替わる。しかし図 3.5.6(c) においては、オペアンプの出力は $(e_1, e_2) = (1, 1)$ から $(e_1, e_2) = (1, -1)$ もしくは $(e_1, e_2) = (1, 1)$ から $(e_1, e_2) = (-1, 1)$ へと切り替わる。本システムにおいて、一般的にパラメータが図 3.5.6(a) から図 3.5.6(c) へと変化したときリターンマップはラミナー部が形成される。その結果、図 3.3.6, 図 3.5.7 に示す非周期軌道が発生する。図 3.5.8 にいくつかの γ の存在領域を示す。図 3.5.8 のパラメータにおいて、 $\gamma = 2/2$ は 013, 031, 032, $\gamma = 2/4$ は 30131, 03231, 03131 の解軌道が存在している。 γ の分母、もしくは分子が 2 のときリターンマップ上で軌道は決して 2 重ループにはならない。この場合、比較的容易に分岐集合を厳密に導出可能である。

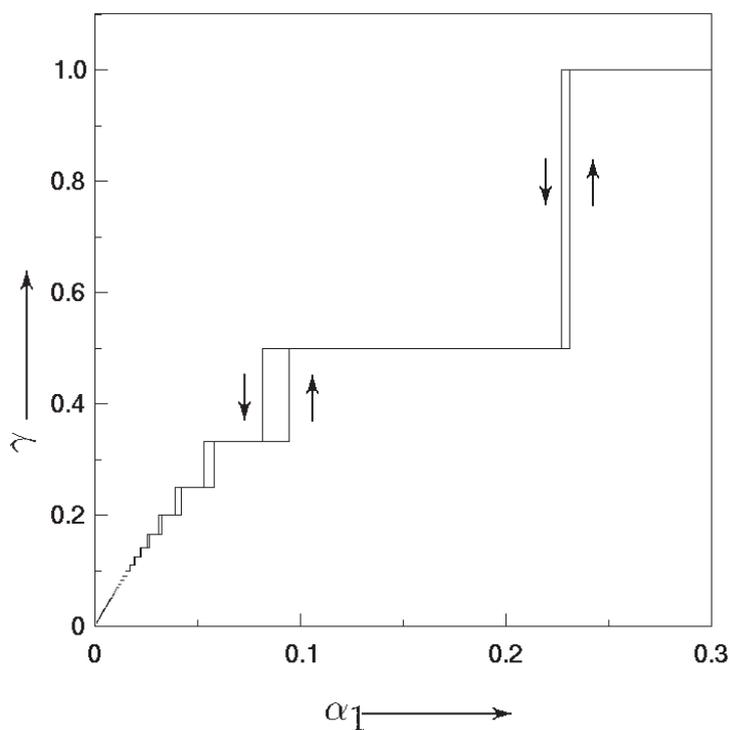


図 3.5.3 ヒステリシス特性. ($\alpha_2=0.5, \beta_1=0.7, \beta_2=0.8$).

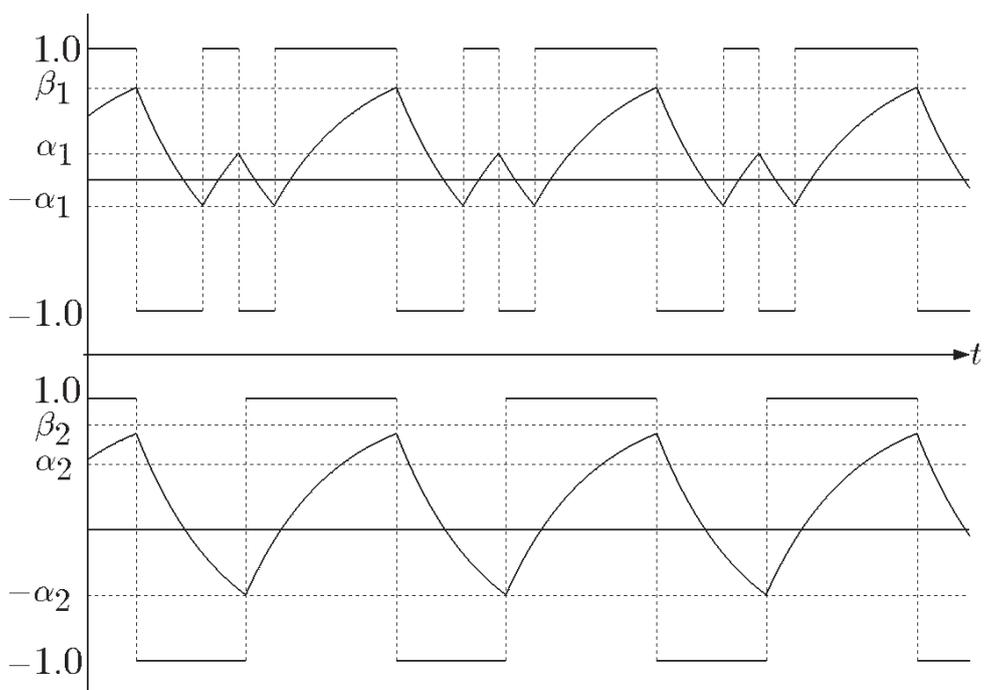


図 3.5.4 波形の例 (03131). ($\alpha_1=0.2, \alpha_2=0.5, \beta_1=0.7, \beta_2=0.8$).

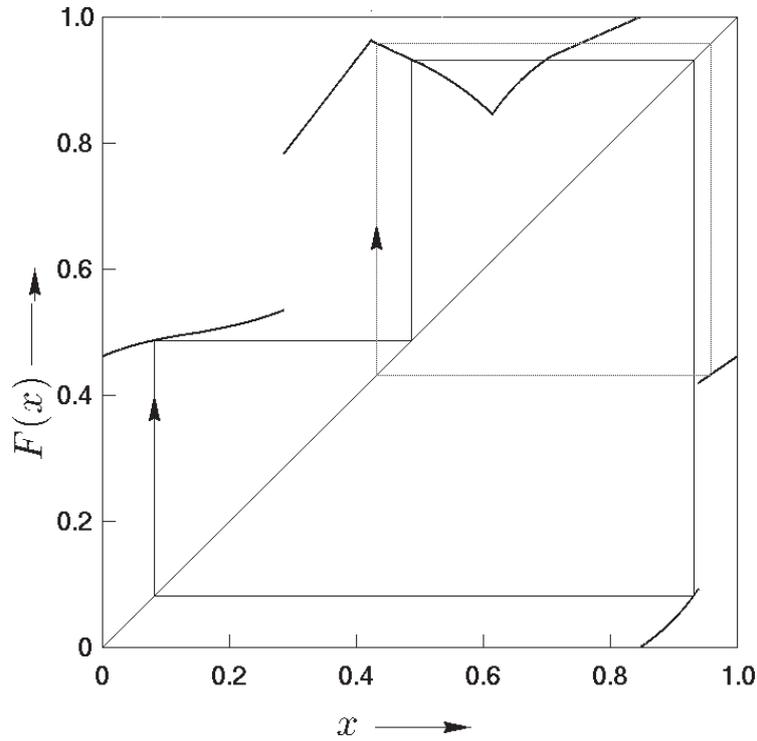


図 3.5.5 リターンマップ. $\gamma = 2/2$ と $2/4$ に対応した 2 種類の周期解が共存している. ($\alpha_1=0.2$, $\alpha_2=0.47$, $\beta_1=0.7$, $\beta_2=0.8$).

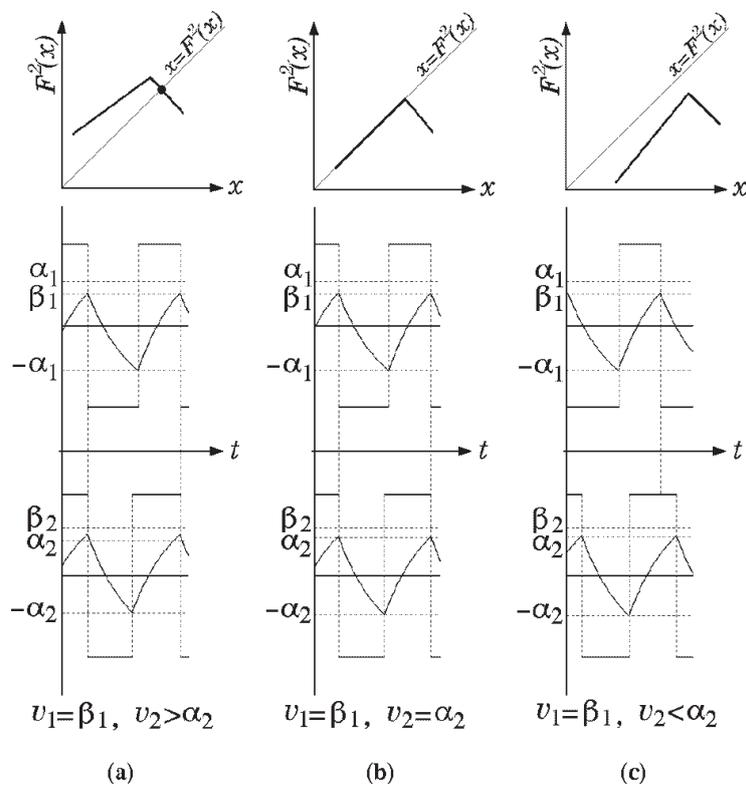


図 3.5.6 分岐集合近傍のリターンマップと波形の例. リターンマップは $x - F^2(x)$ 平面で構成している.

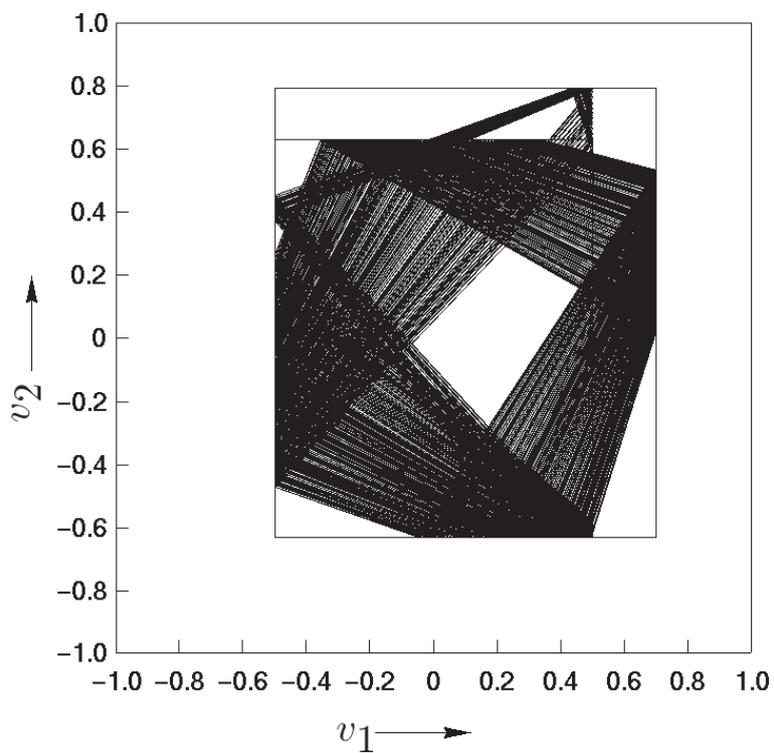


图 3.5.7 非周期解. ($\alpha_1=0.5, \alpha_2=0.63, \beta_1=0.7, \beta_2=0.8$).

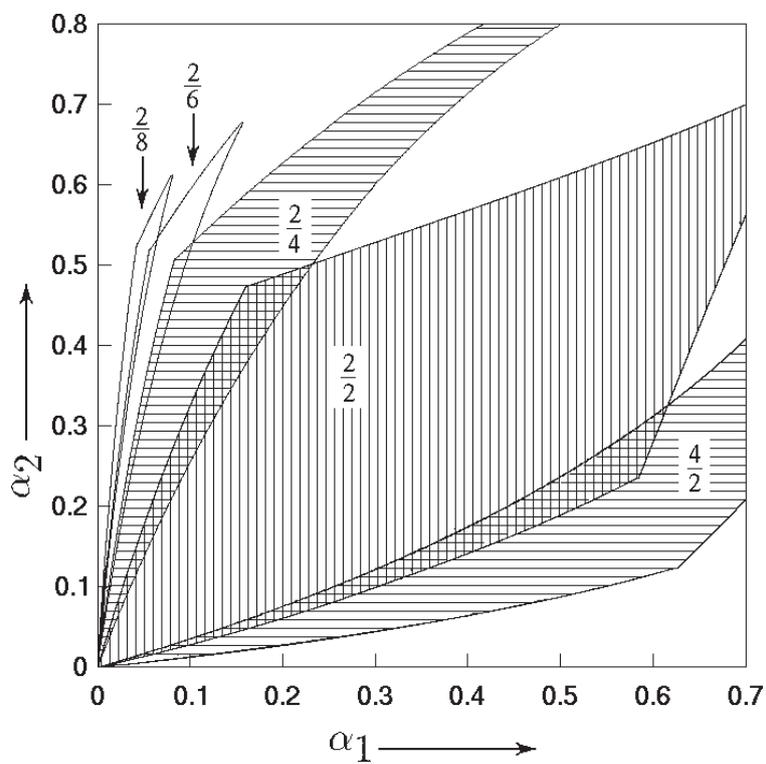


图 3.5.8 分岐图. ($\beta_1=0.7, \beta_2=0.8$).

3.6 むすび

ホタルの集団発光を模擬するため、EFF 回路を提案し、結合した 2 つの EFF 回路の解析を行なった。EFF 回路を区分線形微分方程式で記述し、1 次元リターンマップを厳密に導出した。結合した EFF 回路が同じパラメータを持つとき、各々の EFF 回路の発光のリズムは同相で同期することを証明した。EFF 回路が異なるパラメータを持つ場合、同系のヒステリシスを含む周期解の発生するパラメータ領域を示した。いくつかの理論的な結果は回路実装によっても確認した。

今後の課題としては、より多数の EFF を接続させた際のより詳細な解析、生体系に生ずる同期現象や、他の物理系に生ずる現象との関連、工学的応用などがあげられる。

第 4 章

時刻依存型断続特性を有する非線形力学系における分岐

4.1 まえがき

第 1 章で述べたように、断続動作特性を有する系は定性的にみても興味深い力学系のクラスであると考えられる。外力で強制的に運動方程式が切り替えられる場合、区分線形系では、ダイオードを含む強制レイリー発振器 [41] [42]、ヒステリシスカオス発生回路の周期外力応答 [43] 等が報告されており、厳密解や数値解析法を用いてリターンマップを構成し、周期解の分岐集合を計算可能にし、その結果多くの興味深い研究結果が得られている。文献 [44] では、周期開閉スイッチを含む振動回路の非同期励振現象についての報告もある。しかし、時刻依存型断続特性を有する非線形力学系の定性的性質に基づいた解析はこれまでなされていない。そこで、本章では時刻依存型断続特性を有する非線形力学系の定性的性質に基づいた解析について考える。時刻依存型断続特性を有する非線形力学系は、それぞれの微分方程式は自律系で記述されるが、系全体では非自律系になっている。非自律系にみられる周期解の分岐現象は、周期的外力の周期にあわせて時間的に Poincaré 写像を定義することができ、この Poincaré 断面上の固定点の問題、すなわち離散力学系の問題として取り扱うことができる [16]。しかし、一般にこれらの方法は、解軌道が連続で、かつ、なめらか (可微分) である場合のみ計算が可能であり、断続回路のように、解軌道がなめらかでない点 (不可微分点) を含むような場合、そのまま適用することはできない。本章では、この問題を解決するため、合成力学系の Poincaré 写像の構成を行ない、分岐パラメータ値の追跡法を述べる。具体的な解析例として、

- 周期開閉スイッチを持つ 2 次元非線形断続回路 (時刻依存型断続特性を有する Alpazur 発振器)
- 2 次元自律系に周期外力で動作する断続回路を付加した 3 次元非線形断続回路 (断続 RC 回路を持つ BVP 発振器)

を考える。周期開閉スイッチを持つ 2 次元非線形断続回路は、レイリー型の発振器部分とスイッチで制御される直流電源部分から構成される Alpazur 発振器と呼ばれる回路であり、得られた Neimark-Sacker 分岐に沿って存在する同期解とカオスについて検討を行なった。これらの結果の一部は実際の回路においても確認した。2 次元自律系に周期外力で動作する断続回路を付加した 3 次元非線形断続回路は、状態変

数の相互依存性が周期的，かつ断続的に変化を繰り返す，状態空間が分離，結合する合成力学系になっている．特に基本調波に焦点を絞り安定性の変化を分岐現象を通じて解析した．解析結果として，

1. Neimark-Sacker 分岐に沿ってみられる様々な位相同期解の存在
2. 2 種類のカオスへ至るルート
3. 余次元 2 の分岐
4. パラメータの変化と系に発生する解軌道に関する考察

を得た．時刻依存型断続特性を有する非線形力学系では，2. の準周期解からカオスへ至るトーラス崩壊ルート，3. および 4. に関して分岐の立場から検討は，新しい結果と考えられる．

4.2 解析方法

4.2.1 問題の記述

次の m 個の不連続な非線形関数に従った n 次元自律系を考える：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_i), \quad 0 < t \leq \tau_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (4.2.1)$$

ここで， \mathbf{f}_i から \mathbf{f}_{i+1} への切り替わりは τ_i 時間経つと外力で強制的に動作すると仮定する．図 4.2.1 に式 (4.2.1) の解軌道の様子を示す．式 (4.2.1) の解軌道：

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_i) \quad (4.2.2)$$

は，式 (4.2.2) の解をつなぎ合わせた解となる．ここで， $t \in \mathbf{R}$ は時刻， $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ は状態を表す n 次元ベクトル， $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r$ は \mathbf{f}_i に共通なパラメータ， $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbf{R}^s$ はそれぞれ \mathbf{f}_i のみに依存するパラメータである．また，非線形関数 \mathbf{f}_i はなめらかで各変数，パラメータに関して必要なだけ微分可能であるとする．各軌道は自律系であるから，時間の原点の平行移動に関して，解も同じく平行移動する．すなわち， $t = 0$ で初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ を出発する解を式 (4.2.2) とすれば， $t = \sigma$ で初期値 $\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{x}_0$ を出発する解は

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t - \sigma, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_i) \quad (4.2.3)$$

となる．この性質を利用して，式 (4.2.1) の i 番目の非線形関数 \mathbf{f}_i に従う解軌道を

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_i(t, \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_i) \quad (4.2.4)$$

と表現する．以下，この系にみられるリミットサイクルの分岐パラメータを求める．

4.2.2 Poincaré 写像

点 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$ を初期値とする解の $t = \tau_i$ における点を \mathbf{x}_{i+1} ，点 $\mathbf{x}_{i+1} \in \mathbf{R}^n$ を初期値とする解の $t = \tau_{i+1}$ における点を \mathbf{x}_{i+2} と仮定する．時刻依存型断続特性を有する力学系はその性質より必ず解軌道は周期的

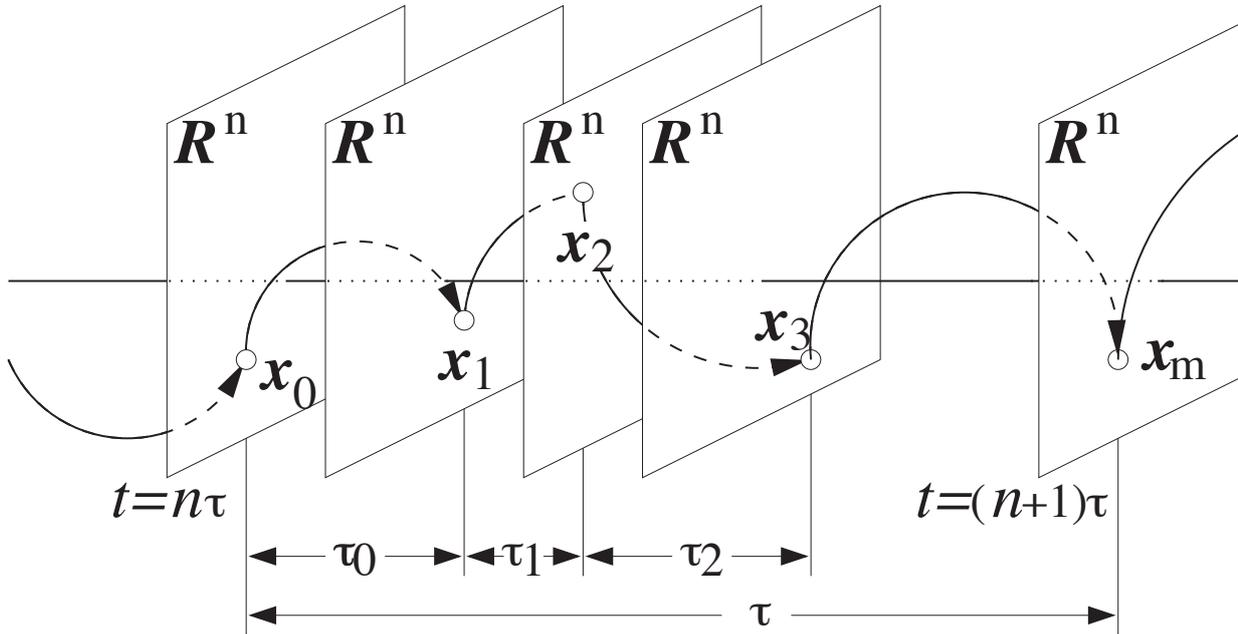


図 4.2.1 時刻依存型断続特性を有する非線形力学系 (2.2 節 case a.1) における解軌道

である. このことを利用し, 次の m 個の写像を定義する.

$$\begin{aligned}
 T_0: \quad \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\
 \mathbf{x}_0 &\mapsto \mathbf{x}_1 = \varphi_0(\tau_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_0) \\
 T_1: \quad \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\
 \mathbf{x}_1 &\mapsto \mathbf{x}_2 = \varphi_1(\tau_1, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_1) \\
 &\dots \\
 T_{m-1}: \quad \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\
 \mathbf{x}_{m-1} &\mapsto \mathbf{x}_0 = \varphi_{m-1}(\tau_{m-1}, \mathbf{x}_{m-1}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_{m-1})
 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

このとき, 系の周期 τ は次式となる.

$$\tau = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i \tag{4.2.6}$$

各写像 T_i の合成 T は

$$T = T_0 \circ T_1 \circ \dots \circ T_{m-1} \tag{4.2.7}$$

となる. この写像 T を Poincaré 写像とすることにより, 系全体の解析が可能となる. Poincaré 写像の微分は次式で導出できる.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \right|_{t=\tau} = \prod_{i=0}^{m-1} \left. \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{t=\tau_i} \tag{4.2.8}$$

m 周期点に関しても同様の議論が可能である.

4.2.3 分岐パラメータ計算法と固定点の性質

式 (4.2.8) の特性方程式は:

$$\chi(\mu) = \left| \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} - \mu \mathbf{I}_n \right| = 0 \quad (4.2.9)$$

となる. ここで分岐パラメータの計算には, 式 (4.2.9) を固定点条件と連立させ, \mathbf{x} , λ について解けばよい.

$$F(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} T(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \\ \chi(\mu) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.2.10)$$

変分系の各要素は, 線形微分方程式の基本行列解を, 数値積分によって各々 $t = 0$ から $t = \tau_i$ まで求めるとよい:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}}(t, \varphi(t, \mathbf{x}_i)) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \\ \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{t=0} &= \mathbf{I}_n \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

4.3 時刻依存型断続特性を有する Alpazur 発振器

4.3.1 回路方程式とスイッチング動作

前節で述べた手法を図 4.3.1 に示す時刻依存型断続特性を有する Alpazur 発振器に適用する. Alpazur 発振器は, Rayleigh 型の発振器部分とスイッチ sw で制御される直流電源部分から構成され, スイッチによって回路の動作状態が切り替えられるようになっている. 発振器部分は電流-電圧特性が 3 次の関数として表される非線形コンダクタンスを含み, キャパシタ電圧および線形インダクタの電流の 2 変数により系が記述される 2 次元自律系である [46]. ここで, スイッチの切り替わりは図 4.3.1 のスイッチの位置 a , b によっておこる. 図 4.3.2 にスイッチング動作を示す. ここで, スイッチングの周期を τ とし, θ はスイッチの a , b にそれぞれとどまる時間の比率を示している. このスイッチング動作は外力により強制的に切り替えられることに注意する.

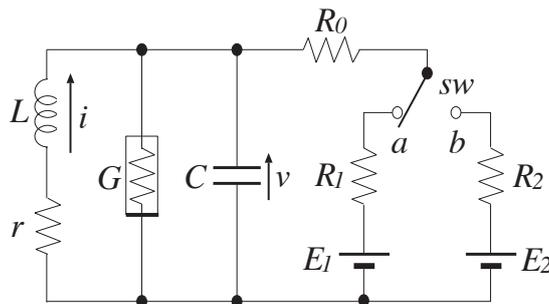


図 4.3.1 Alpazur 発振器.

適当に変数変換を施すと、スイッチが a 側に接続されている場合の回路方程式は:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_1)y - \frac{1}{3}y^3 + B_1 \end{cases} \quad 0 < t \leq \theta\tau \quad (4.3.1)$$

スイッチが b 側に接続されている場合の回路方程式は:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_2)y - \frac{1}{3}y^3 + B_2 \end{cases} \quad \theta\tau < t \leq \tau \quad (4.3.2)$$

となる。ここで、 $\theta\tau$ はスイッチが a に固定されている時間を表す。図 4.3.3 に解軌道の例を示す。

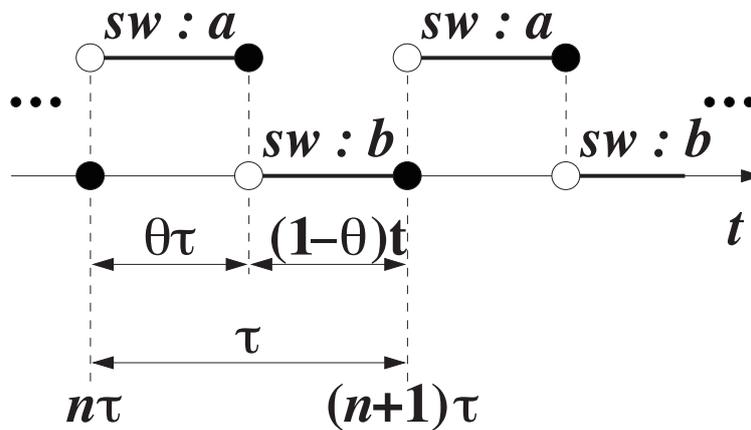


図 4.3.2 スイッチング動作.

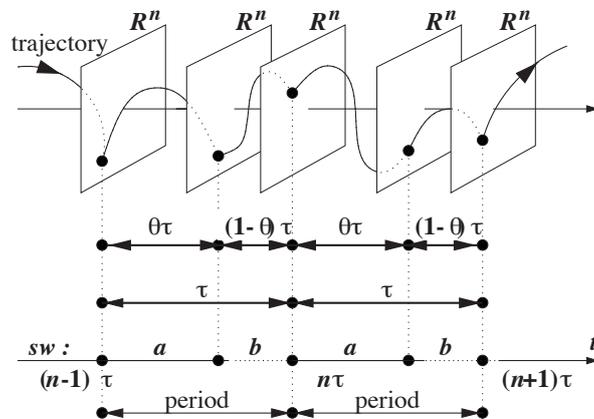


図 4.3.3 解軌道の様子.

4.3.2 単体の Alpazur 発振器の分岐

図 4.3.4 に単体の g - B 平面における Alpazur 発振器の分岐図を示す。ここで、 $k = 0.1$ である。

領域  : 安定なリミットサイクルを持つ

領域  : 安定な平衡点を持つ

であり、図中の曲線は g - B 平面における平衡点の Hopf 分岐を示す。本章では、式 (4.3.1) のパラメータを $g_1 = 0.2$, $B_1 = 0.5$ に固定し (図 4.3.4 ■ で示す), 式 (4.3.2) のパラメータを徐々に変化させたときの分岐構造を観察する。ここで選んだパラメータは、図 4.3.4 の各点、

- (a) : $g_2 = 2.0, B_2 = 2.0$. 式 (4.3.2) は安定な平衡点を持つ。
- (b) : $g_2 = 1.0, B_2 = 1.2$. 式 (4.3.2) は安定な平衡点を持ち、かつ発振状態に近い。
- (c) : $g_2 = 0.9, B_2 = 1.1$. 式 (4.3.2) は安定な平衡点を持ち、ほぼ Hopf 分岐曲線上にある。
- (d) : $g_2 = 0.8, B_2 = 1.0$. 式 (4.3.2) は安定なリミットサイクルを持ち、かつ Hopf 分岐曲線に近い。
- (e) : $g_2 = 0.4, B_2 = 1.0$. 式 (4.3.2) は安定なリミットサイクルを持つ。
- (f) : $g_2 = 0.2, B_2 = -0.5$. 式 (4.3.2) は安定なリミットサイクルを持つ。この場合、スイッチが a 側に接続されているときと b 側に接続されたときで、直流電源の極性が反転しているのと同様である。

とする。

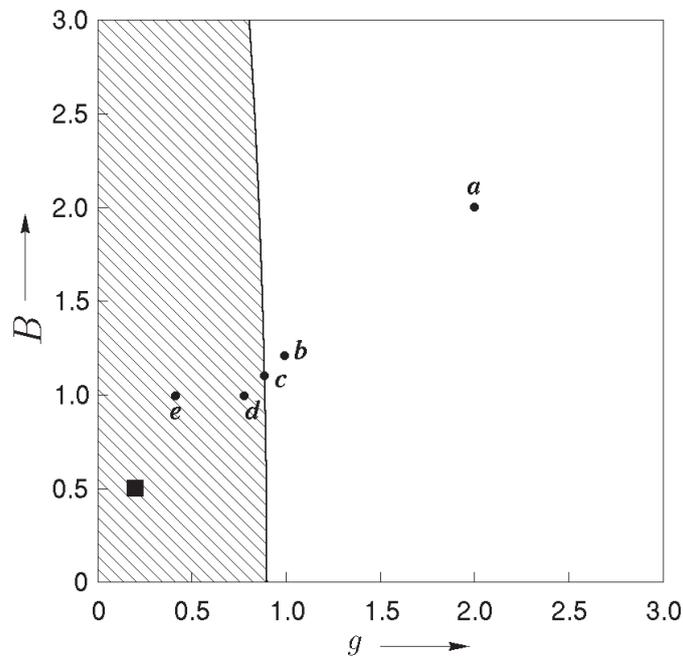


図 4.3.4 g, B の変化による発振器の状態変化。図中の曲線は 平衡点の Hopf 分岐を示す。

4.3.3 解析結果

以下に示す分岐図において、 n 周期点の分岐集合として次の記号を用いる。

- $G_k^n \cdots$ 接線分岐
- $I_k^n \cdots$ 周期倍分岐
- $H_k^n \cdots$ Neimark-Sacker 分岐

ここで、 k は同じ周期の分岐現象を区別するために用いた。

パラメータを発振状態に徐々に近付けたときの周期 τ の周期解の分岐図を図 4.3.5-図 4.3.7 に示す。領域  には、準周期解が存在している。ここで準周期解は、系がスイッチングの周期 τ に対して非同期であることを示している。これらの解が位相同期することによって発生する周期 $l\tau (l = 2, 3, \dots)$ もこの領域には存在している。領域  には、周期 τ の周期解 (同期解) が存在している。発振状態に近づくにつれて、準周期解の存在領域  が広がっていることがわかる。それに伴って、周期解が得られる領域が狭くなっている。また τ の小さい領域では、周期倍分岐も徐々に消滅している。

さらにパラメータを変化させた分岐図を図 4.3.8-図 4.3.10 に示す。分岐図は $\theta = 0.5$ に対して対称に近くなっている。図 4.3.8 において、分岐図中の周期倍分岐は完全に消滅し、新たな接線分岐曲線が θ の小さい領域で発生している。また図 4.3.10 においては分岐図は完全に対称になり、周期解は $\theta = 0.5$ で原点に対して対称な解軌道となる (図 4.3.11)。以下、図 4.3.5 に注目し、解析を行なう。

図 4.3.5 の拡大図を図 4.3.12, 図 4.3.13 に示す。図 4.3.12 には多数の接線分岐曲線 G^i が存在している。Neimark-Sacker 分岐曲線 H_1^1 に沿って $G^i (i = 1, 2, \dots)$ が発生する周期解の周波数比 n/m を並べると次のような数列を得る。

$$S_5 = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right\} \quad (4.3.3)$$

ここで n/m は、分母は m -周期であることを、分子が巻き数、すなわち m 周期あたりの振動数を n とした。例として、図 4.3.14 に G_2^3 に囲まれた領域内で発生する $2/3$ 分数調波を示す。この数列 (4.3.3) は、同期やリズムの同調に関して同期周波数を問題とするとよくみられる Farrey 数列を形成している。この結果から、Neimark-Sacker 分岐曲線に沿って存在する接線分岐曲線がサークル写像などによく見られるアーノルドの舌を形成していることがわかる。本章では、 $2 \sim 5\tau$ の周期を持つ接線分岐曲線のみを示したが、これら以外にも、無数の n/m が有理数比の周期解の接線分岐曲線が存在している。図 4.3.15 に $\tau = 8.5$ に固定したときの一方向分岐図で示す。また図 4.3.13 では、周期 τ の周期解が、周期倍の連鎖 I_1^2, I_1^4, I_1^8 などを経て、カオスが発生していることがわかる (図 4.3.16)。さらに θ を大きくすると、 G_3^3 により発生した周期 3τ の周期解に、系の状態は引き込まれる。さらに θ を 1 に近づけると、準周期解が発生する。

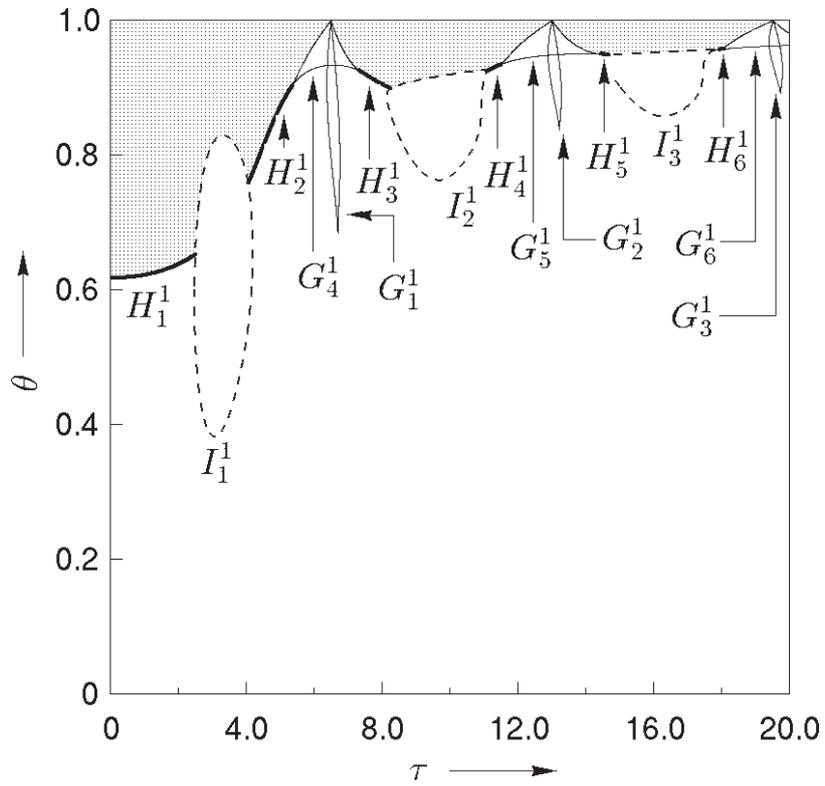


図 4.3.5 点 (a) での分岐図 ($g_2 = 2.0, B_2 = 2.0$) .

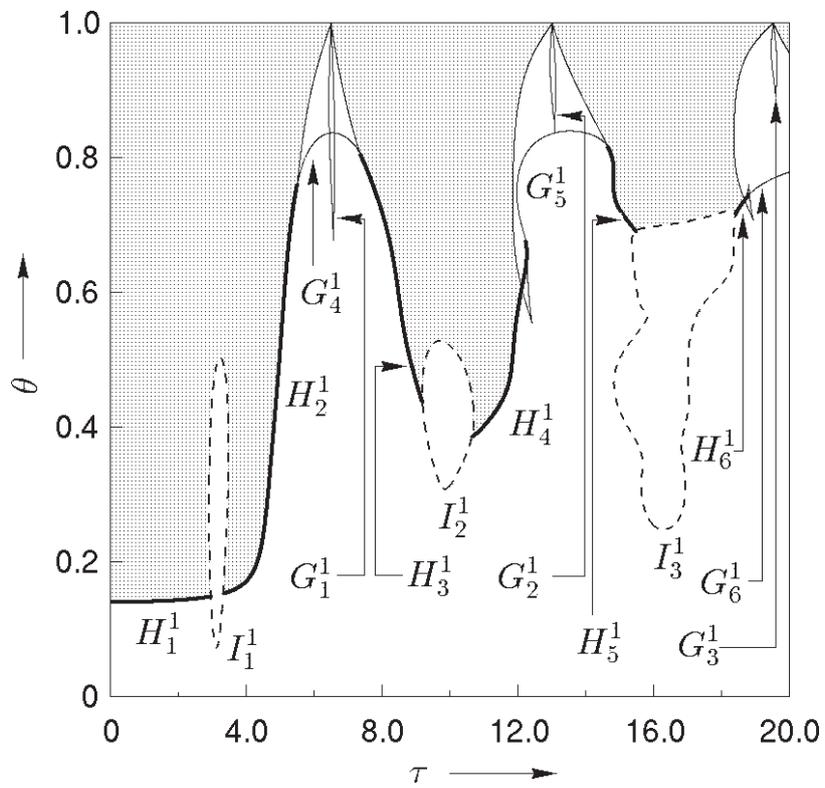


図 4.3.6 点 (b) での分岐図 ($g_2 = 1.0, B_2 = 1.2$) .

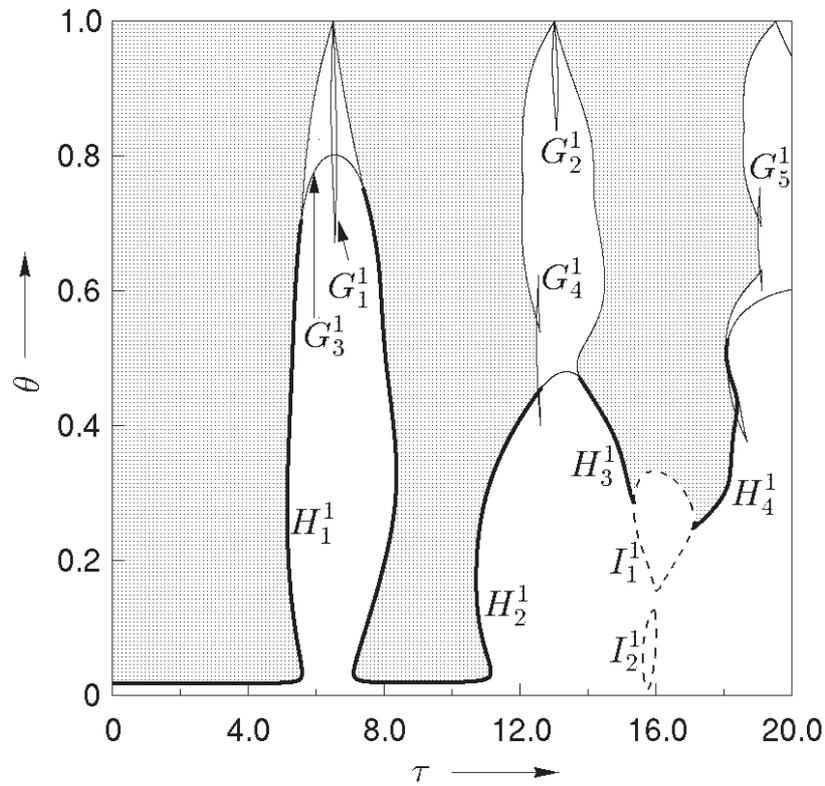


図 4.3.7 点 (c) での分岐図 ($g_2 = 0.9, B_2 = 1.1$) .

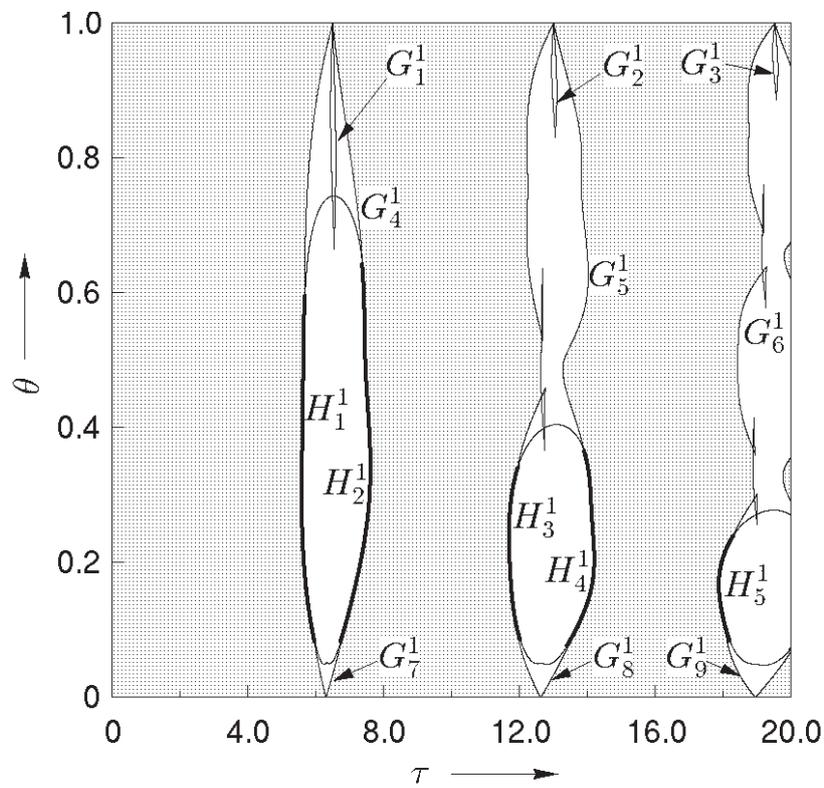


図 4.3.8 点 (d) での分岐図 ($g_2 = 0.8, B_2 = 1.0$) .

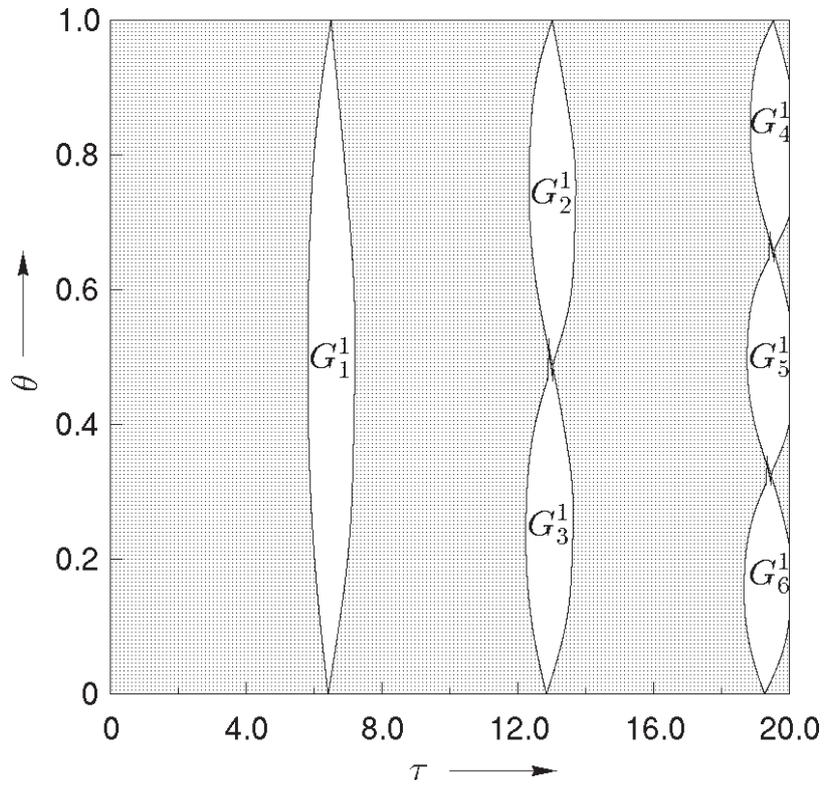


図 4.3.9 点 (e) での分岐図 ($g_2 = 0.4, B_2 = 1.0$) .

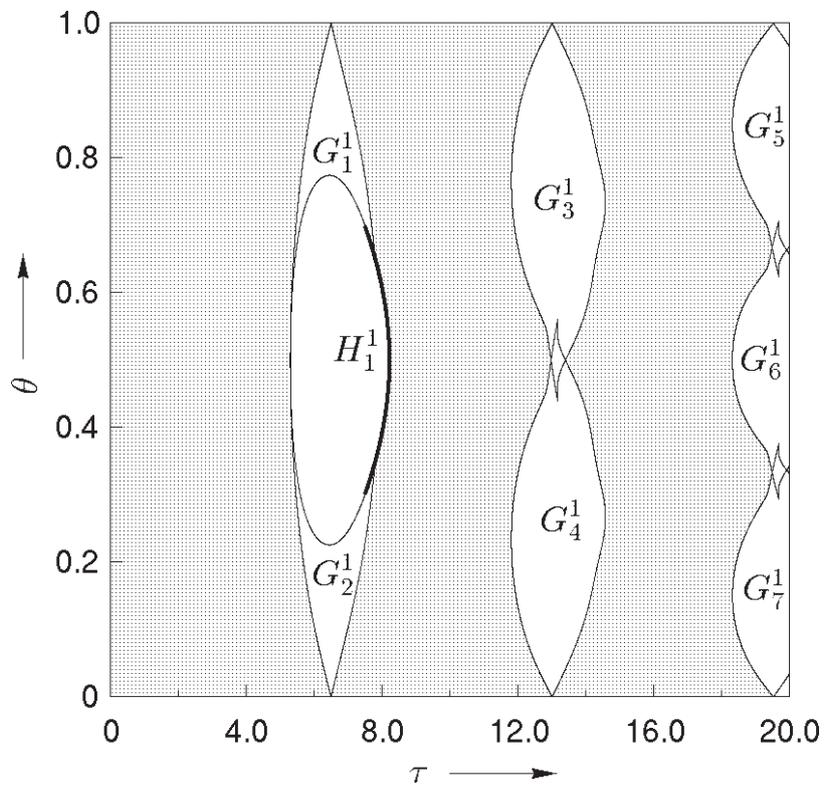


図 4.3.10 点 (f) での分岐図 ($g_2 = 0.2, B_2 = -0.5$) .

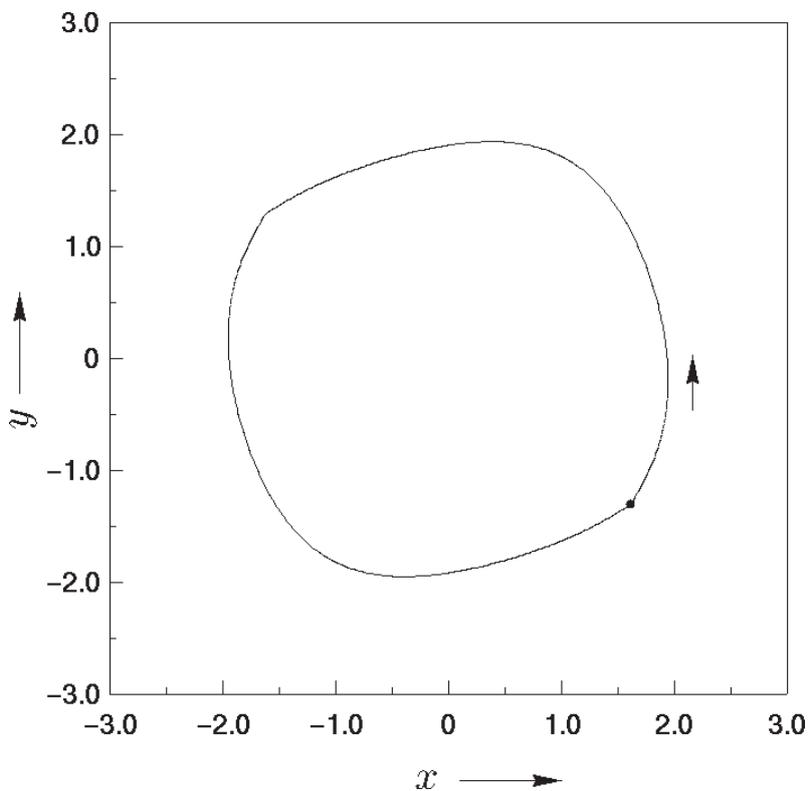


図 4.3.11 状態平面図 ($\tau = 6.0, \theta = 0.5$).

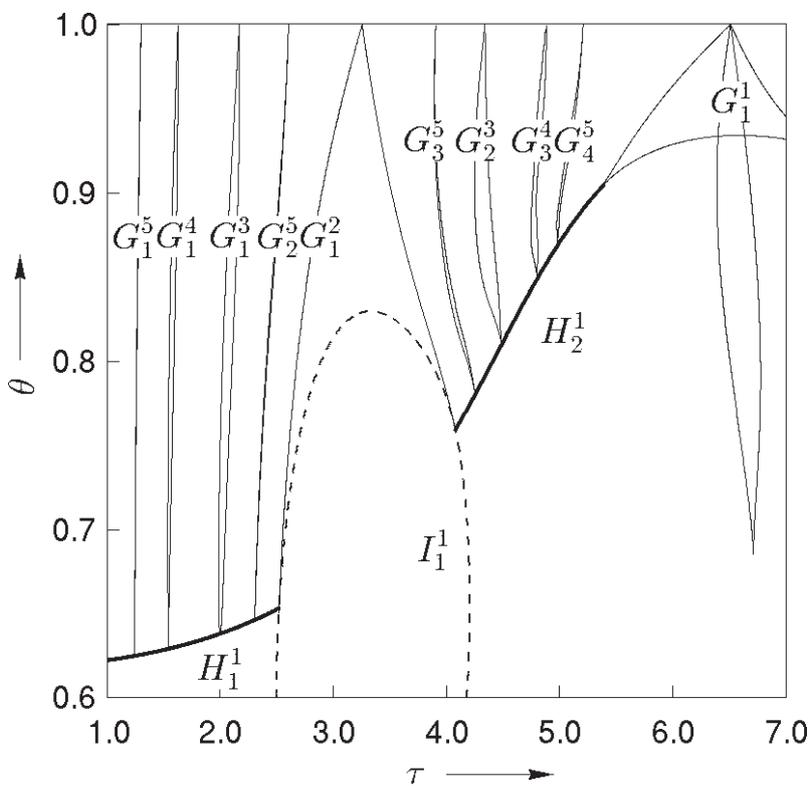


図 4.3.12 図 4.3.5 の拡大図 1.

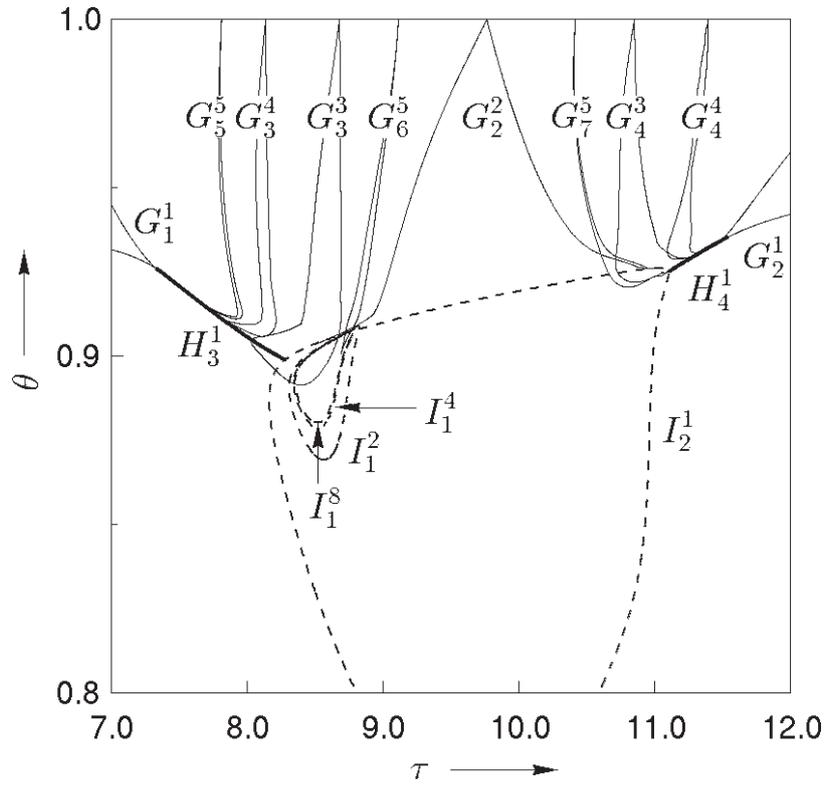


図 4.3.13 図 4.3.5 の拡大図 2.

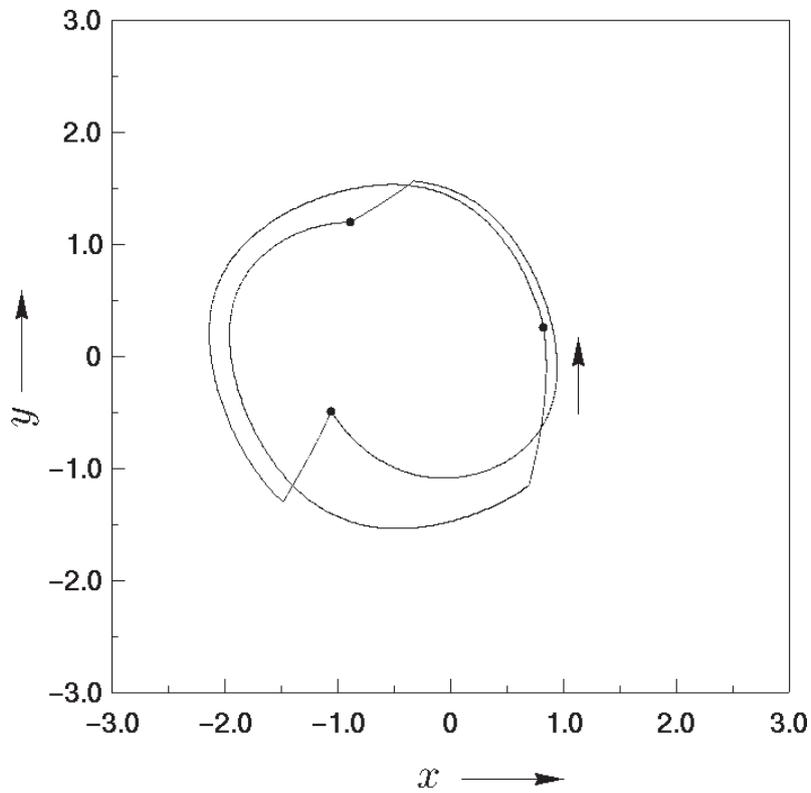


図 4.3.14 状態平面図. 黒い点は写像 T の点を表す. ($\tau = 4.3, \theta = 0.9$).

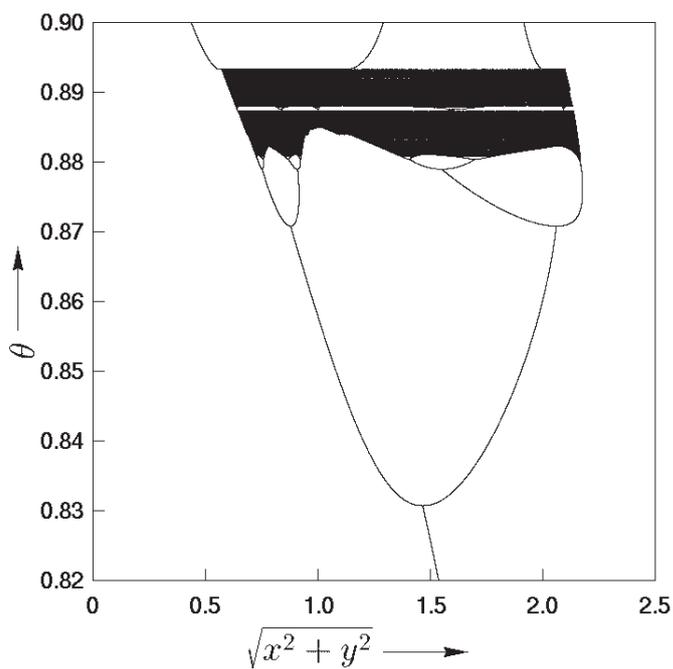


図 4.3.15 θ の変化による一方向分岐図 ($\tau = 8.5$).

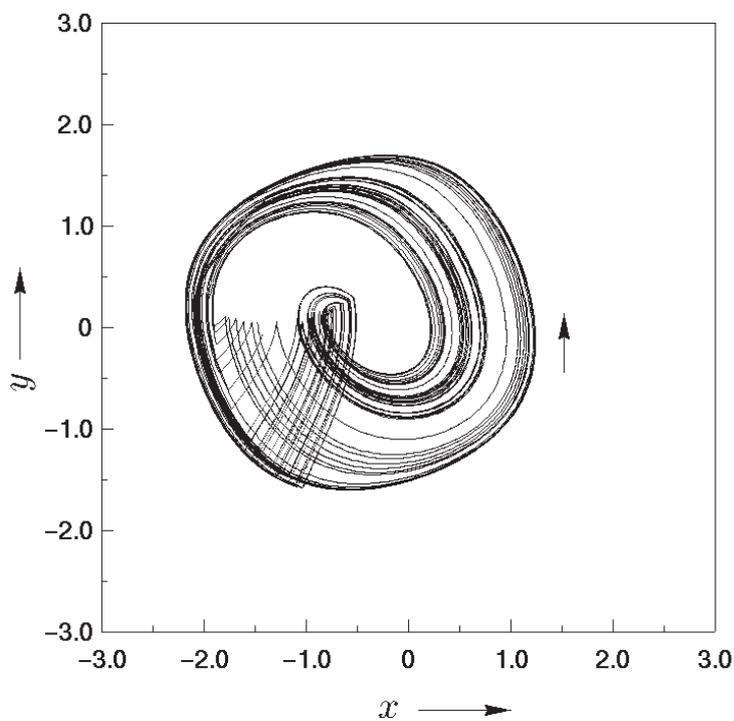


図 4.3.16 カオス振動, ($\tau = 8.5, \theta = 0.89$).

4.3.4 回路実装

本節では、時刻依存型断続特性を有する Alpazur 発振器の回路実装を行い、アルゴリズム、理論的な結果の正当性を示す。図 4.3.1 の回路方程式は:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -v - ri \\ C \frac{dv}{dt} = i - G(v) + \frac{E_1 - v}{R_0 + R_1}, \end{cases} \quad (\text{if SW is at } a) \quad (4.3.4)$$

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -v - ri \\ C \frac{dv}{dt} = i - G(v) + \frac{E_2 - v}{R_0 + R_2} \end{cases} \quad (\text{if SW is at } b) \quad (4.3.5)$$

ここで,

$$G(v) = -a_1 v + a_3 v^3 \quad (4.3.6)$$

とし、以下の変数変換:

$$x = \sqrt{c_3 L} i, \quad y = \sqrt{c_3 C} v, \quad t' = \frac{1}{\sqrt{LC}} t, \quad (4.3.7)$$

$$r_1 = \frac{1}{R_0 + R_1}, \quad r_2 = \frac{1}{R_0 + R_2}, \quad k = r \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (4.3.8)$$

$$g_1 = 1 - (a_1 - r_1) \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad g_2 = 1 - (a_1 - r_2) \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (4.3.9)$$

$$c_3 = \frac{3a_3}{C} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad B_1 = r_1 \sqrt{c_3 L} E_1, \quad B_2 = r_2 \sqrt{c_3 L} E_2, \quad (4.3.10)$$

を行い、 t' を t と書き改めることで正規化された方程式 (4.3.1) および式 (4.3.2) を得る。各素子を次の値に固定したとき,

$$\begin{aligned} L &= 50[\text{mH}], \quad C = 0.1[\mu\text{F}], \quad E_1 = 1.8[\text{V}], \quad E_2 = 2.1[\text{V}], \quad R_0 = 0[\Omega], \quad R_1 = 987[\Omega] \\ R_2 &= 281[\Omega], \quad r = 70.72[\Omega], \quad a_1 = -2.145/1000, \quad a_3 = 0.069/1000 \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

ならば,

$$B_1 = 0.27 E_1, \quad B_2 = 0.96 E_2, \quad x = 270.53 i, \quad y = 0.38 v \quad (4.3.12)$$

であり,

$$k = 0.1, \quad g_1 = 0.2, \quad g_2 = 2.0, \quad B_1 = 0.5, \quad B_2 = 2.0 \quad (4.3.13)$$

を得る。

実際の回路実装においてスイッチ部分にはアナログスイッチ 4053 を使用し、制御信号は図 4.3.17 の回路を用いる。 $R_2 = 0.86 R_3$ の場合、 R_{1a} および R_{1b} により、充電の時定数を変化させる。 R_{1a} が R_{1b}

より大きい場合 $-V_{\text{out}}$ の時間が長くなり, 逆に R_{1a} が R_{1b} より大きいと $-V_{\text{out}}$ の時間が短くなる. デューティは $R_{1b} : R_{1a}$ で決定される. $\tau = 8.5, \theta = \frac{2}{3}$ の制御信号の例を図 4.3.18 に示す.

図 4.3.15 に従ってスイッチング比 θ を増加させた際の波形, 状態平面図を図 4.3.19-図 4.3.23 に示す. 図 4.3.15 と同様に周期倍分岐によりカオス (図 4.3.19-図 4.3.21) が発生し, さらに θ を大きくすることで 3 周期 (図 4.3.22), 準周期解 (図 4.3.23) がそれぞれ観測される.

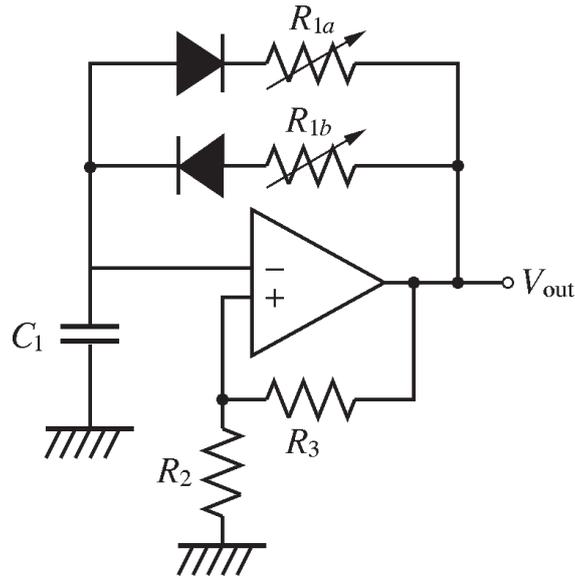


図 4.3.17 デューティを変化させる方形波発振器.

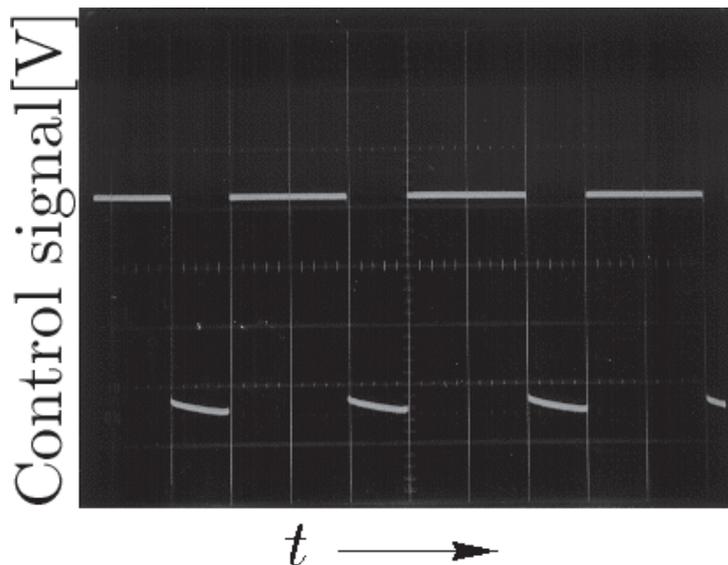
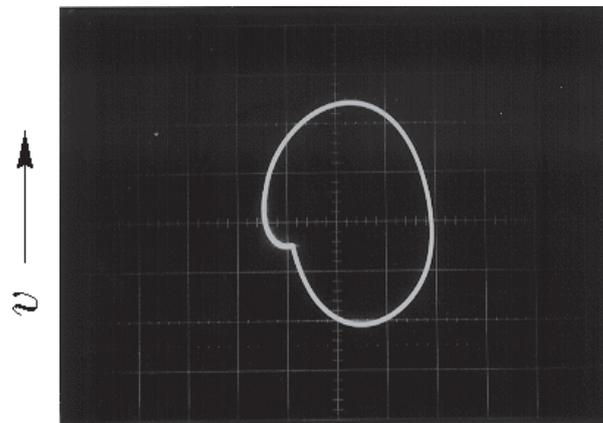
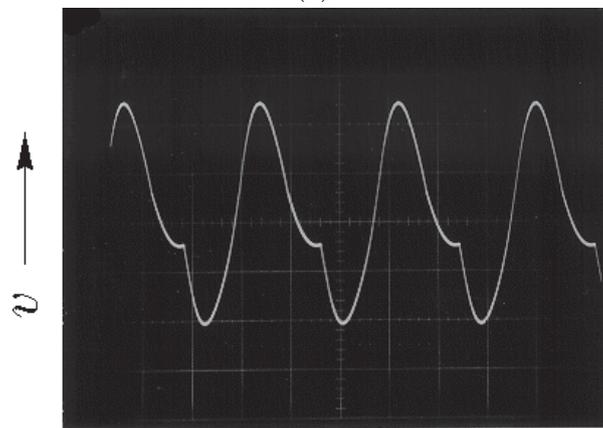


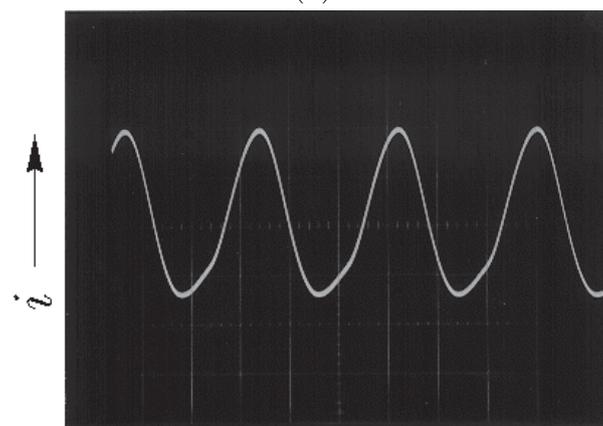
図 4.3.18 $\tau = 8.5, \theta = \frac{2}{3}$ の制御信号の例 (0.2[ms/div], 5.0[V/div]).



(a)



(b)



(c)

図 4.3.19 1 周期解 ($\tau = 8.5, \theta = 0.75$) (a):(4.1[mA/div], 2.0[V/div]), (b):(0.2[ms], 2.0[V/div]), (c):(0.2[ms/div], 4.1[mA/div])

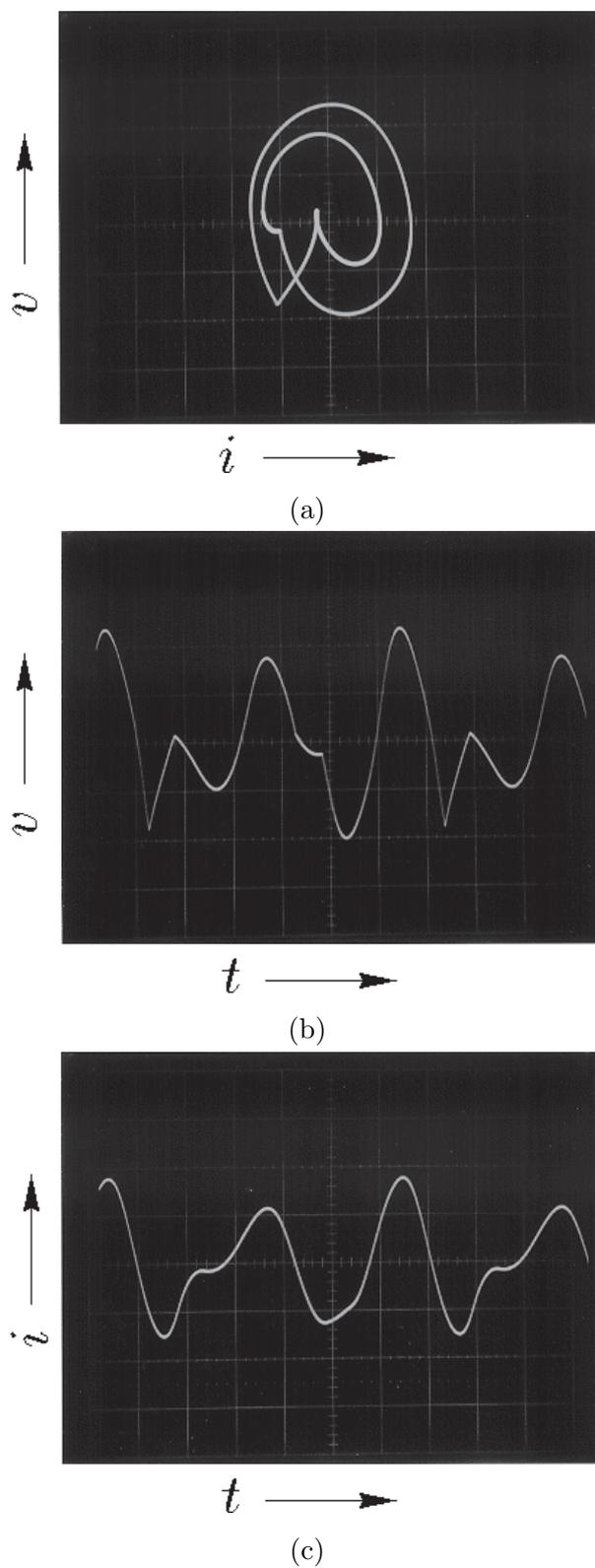
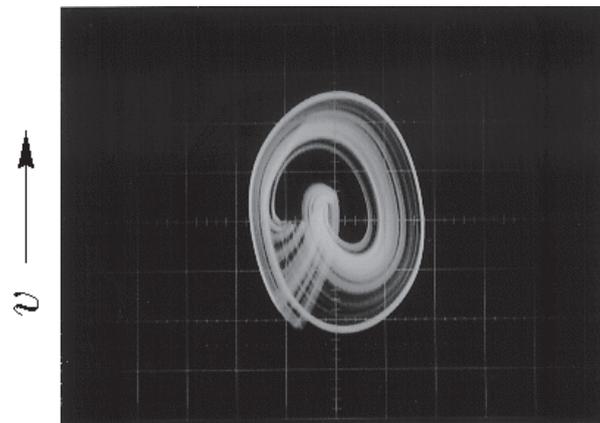
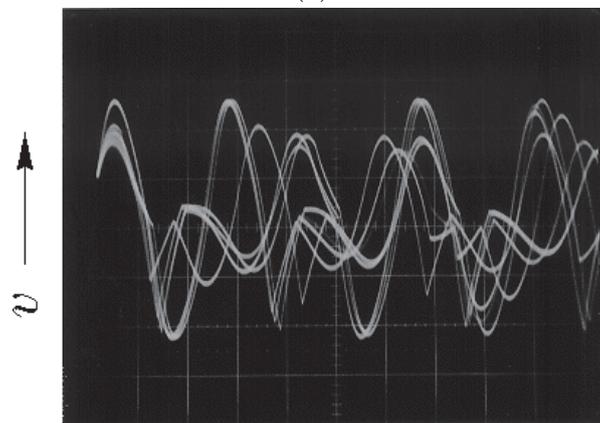


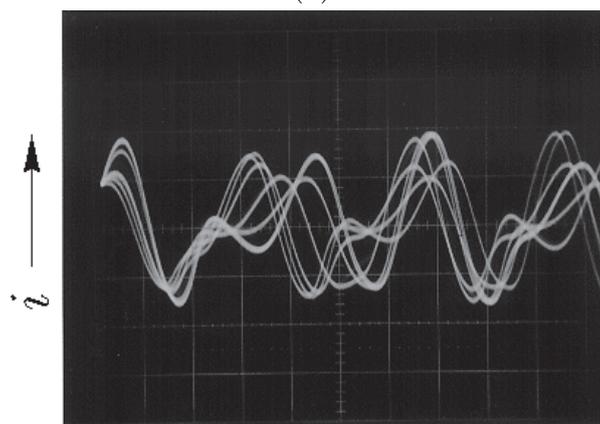
図 4.3.20 2 周期解 ($\tau = 8.5, \theta = 0.85$) (a):(4.1[mA/div], 2.0[V/div]), (b):(0.2[ms], 2.0[V/div]), (c):(0.2[ms/div], 4.1[mA/div])



(a)



(b)



(c)

図 4.3.21 カオスアトラクタ ($\tau = 8.5, \theta = 0.89$) (a):(4.1[mA/div], 2.0[V/div]), (b):(0.2[ms], 2.0[V/div]), (c):(0.2[ms/div], 4.1[mA/div])

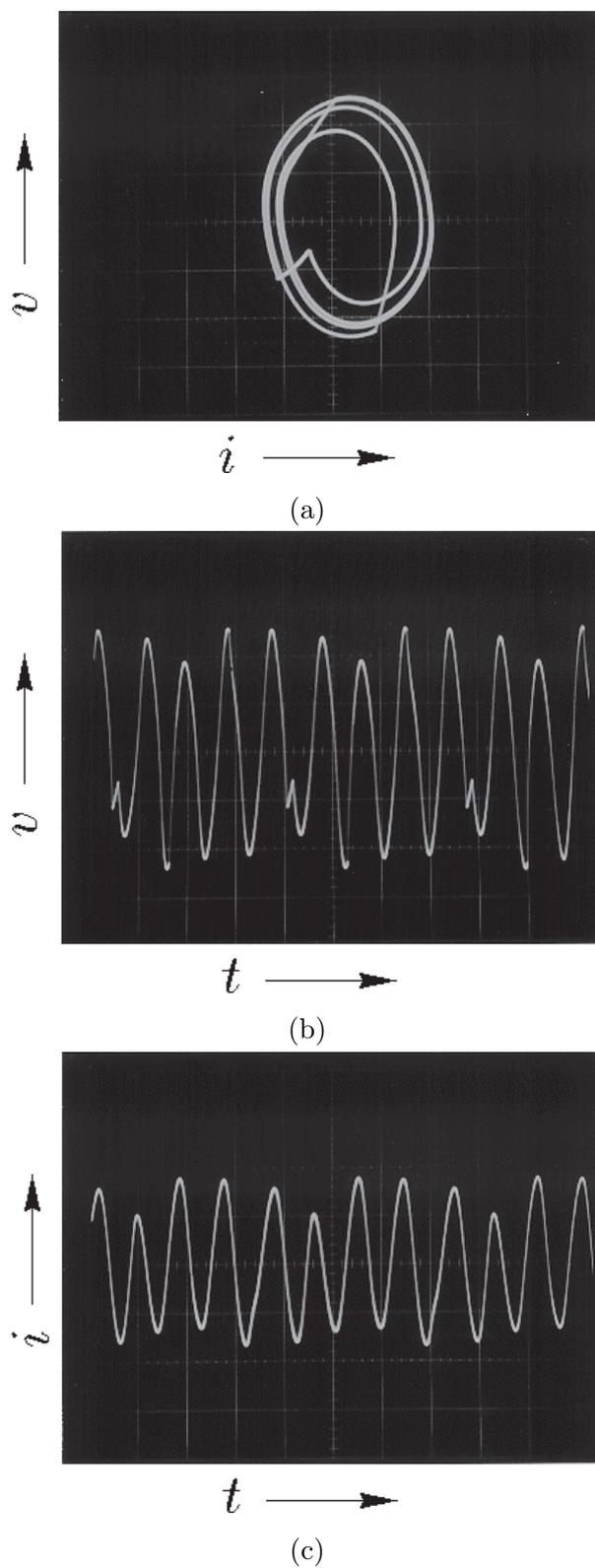


図 4.3.22 3 周期解 ($\tau = 8.5, \theta = 0.93$) (a):(4.1[mA/div], 2.0[V/div]), (b):(0.5[ms], 2.0[V/div]), (c):(0.5[ms/div], 4.1[mA/div])

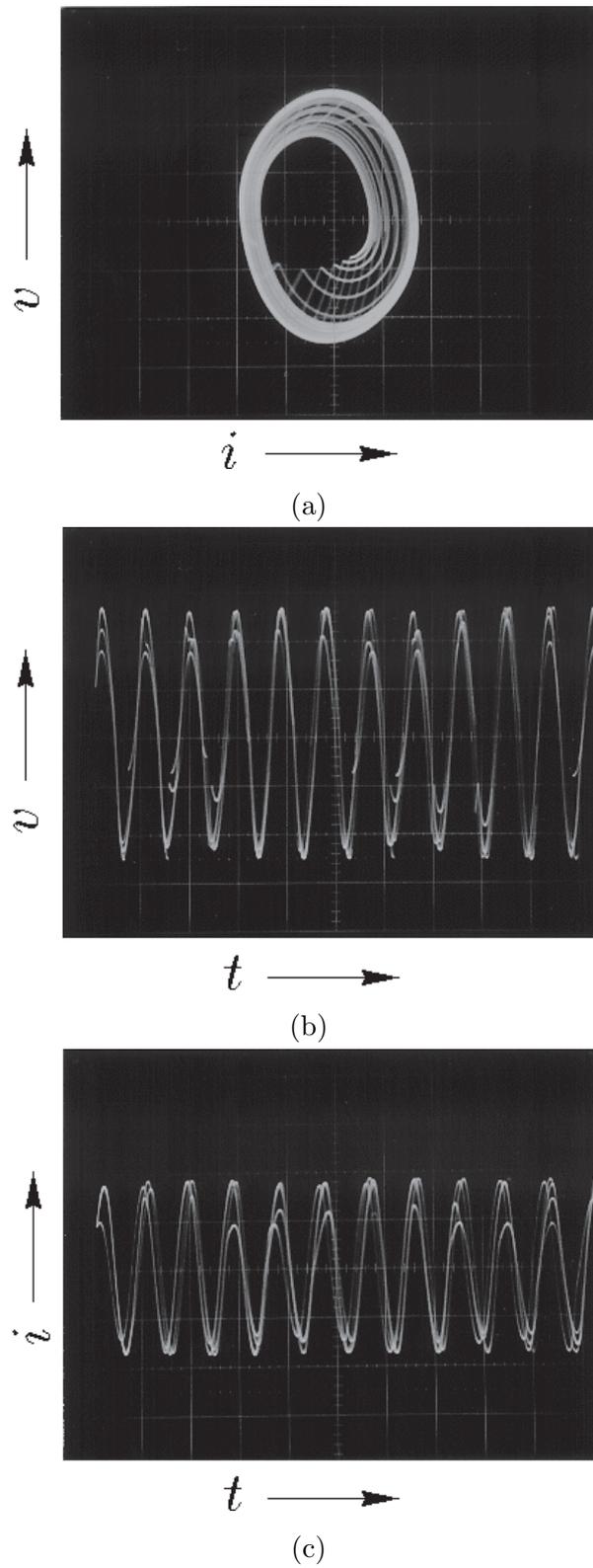


図 4.3.23 準周期解 ($\tau = 8.5, \theta = 0.98$) (a):(4.1[mA/div], 2.0[V/div]), (b):(0.5[ms], 2.0[V/div]), (c):(0.5[ms/div], 4.1[mA/div])

4.4 断続 RC 回路を持つ BVP 発振器

図 4.4.1 に示す断続 RC 回路を持つ BVP 発振器にみられる分岐現象について考える。この回路は、BVP 発振器部分とスイッチ SW で制御される RC 回路部分から構成され、SW によって回路の動作状態が切り替えられるようになっている。発振器全体は、BVP 発振器のキャパシタ電圧および線形インダクタの電流、RC 回路のキャパシタ電圧の 3 変数により系が記述される 3 次元自律系であり、SW は外力で強制的に切り替わると仮定する。SW が ON のときは状態変数 v_1, v_2, i の 3 次元変数がお互いに影響を及ぼしあう系になっている。しかし SW が OFF になると v_2 が独立となり、2 次元と 1 次元の互いに干渉しない別の系として振る舞う。すなわち、周期的な SW の開閉により、状態空間が分離、結合する系になっている。以下、この発振器に生じる周期解 (同期振動) について考察する。

4.3 節では、数値解析、回路実装により状態平面図を多数示しアルゴリズムの正当性を示すことに重点をおいた。そこで、以下の解析は分岐理論を用いたより詳細な解析を行い、一般の時刻依存型断続特性を有する非線形力学系におけるパラメータの変化と系に発生する解軌道に関する考察に重点をおく。

4.4.1 回路方程式

非線形抵抗の電流特性を $i_0 = g(v_1)$ とすると、回路方程式はスイッチ SW が ON の時 (SYSTEM 1):

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} = i - g(v_1) - \frac{v_1 - v_2}{R_1} \\ L \frac{di}{dt} = -v_1 - Ri + E \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} = -G_2 v_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_1} \end{cases} \quad (4.4.1)$$

スイッチ SW が OFF の時 (SYSTEM 2):

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} = i - g(v_1) \\ L \frac{di}{dt} = -v_1 - Ri + E \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} = -G_2 v_2 \end{cases} \quad (4.4.2)$$

となる。非線形抵抗素子 $g(v_1)$ を次の 3 次特性 $g(v_1)$ を

$$g(v_1) = av^3 - bv \quad (4.4.3)$$

とし、次の変数変換を行なう。

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{g_3}}, \quad x = \frac{1}{\alpha} \sqrt{C_1} v_1, \quad y = \frac{1}{\alpha} \sqrt{L} i, \quad z = \frac{1}{\alpha} \sqrt{C_1} v_2, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} t \quad (4.4.4)$$

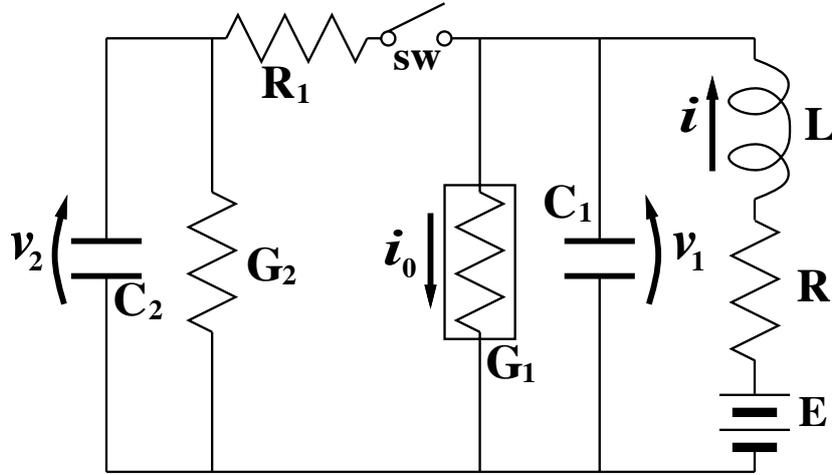


図 4.4.1 断続 RC 回路を持つ BVP 発振器.

さらに,

$$\begin{aligned} c &= b\sqrt{\frac{L}{C_1}}, \quad g_3 = \frac{a}{C_1}\sqrt{\frac{L}{C_1}}, \quad B = \frac{1}{\alpha}\sqrt{C_1}E, \quad k_1 = \sqrt{\frac{C_1}{L}}R, \\ k_2 &= \sqrt{\frac{L}{C_1}}G_2, \quad \delta = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{L}{C_1}}, \quad \gamma = \frac{C_1}{C_2} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

とおくと, スイッチ SW が ON の時 (SYSTEM 1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y + cx - x^3 - \delta(x - z) \\ \frac{dy}{d\tau} = -x - k_1y + B \\ \frac{dz}{d\tau} = \gamma[-k_2z + \delta(x - z)] \end{cases} \quad (4.4.6)$$

スイッチ SW が OFF の時 (SYSTEM 2):

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y + cx - x^3 \\ \frac{dy}{d\tau} = -x - k_1y + B \\ \frac{dz}{d\tau} = -\gamma k_2z \end{cases} \quad (4.4.7)$$

と正規化できる.

4.4.2 スイッチング動作

スイッチング動作を図 4.4.2 に示す. スイッチング周期を T とし, α はスイッチの ON の時間と OFF の時間との比率を表している. したがって, SW が ON になり αT 時間経つと SW は OFF になる. そして, $(1 - \alpha)T$ 時間経つと再び SW は ON になる. システムが切り替わるとき, それまでの経路は以後影響せず, 現在の状態空間の位置だけが次のシステムの初期値として伝えられる. 従ってそれぞれの時刻

では自律系だが，系全体では周期 T の非自律系になっている。

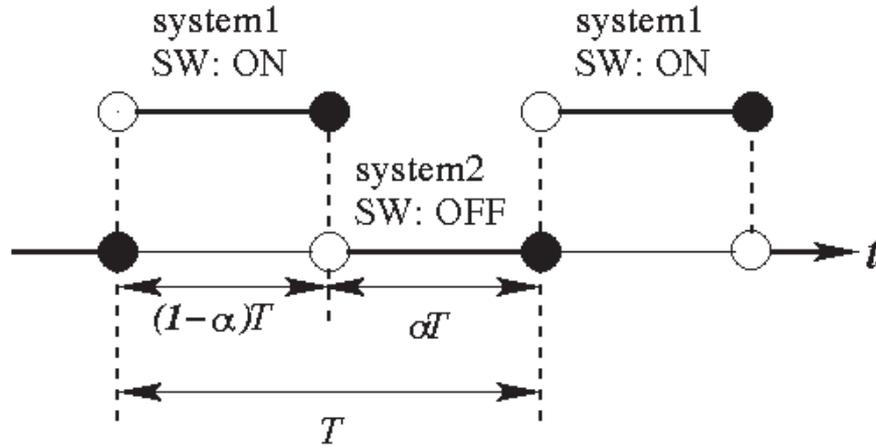


図 4.4.2 スイッチング動作.

4.4.3 解析結果

以下に示す分岐図において， n 周期点の分岐集合の記号は 4.3.3 節と同様のものを用いる。

4.4.3.1 スイッチング動作がない場合の平衡点の性質

式 (4.4.6) および式 (4.4.7) が平衡点を持つ場合を考える。平衡点は次の式をそれぞれ解くことで得られる。

式 (4.4.6) の平衡点:

$$\begin{cases} y + \left(c - \frac{k_2 \delta}{k_2 + \delta} \right) x - x^3 = 0 \\ -x - k_1 y + B = 0 \\ z - \frac{\delta}{k_2 + \delta} x = 0 \end{cases} \quad (4.4.8)$$

式 (4.4.7) の平衡点:

$$\begin{cases} y + cx - x^3 = 0 \\ -x - k_1 y + B = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (4.4.9)$$

回路定数を

$$c = 2.0, \delta = 0.5, k_2 = 0.01, \gamma = 0.3 \quad (4.4.10)$$

に固定した際の，回路図において抵抗 R ，直流電源 E にそれぞれ対応する K_1 - B 平面の分岐図を図 4.4.3 に示す。領域  においては安定なリミットサイクルが存在しており， h は平衡点の Hopf 分

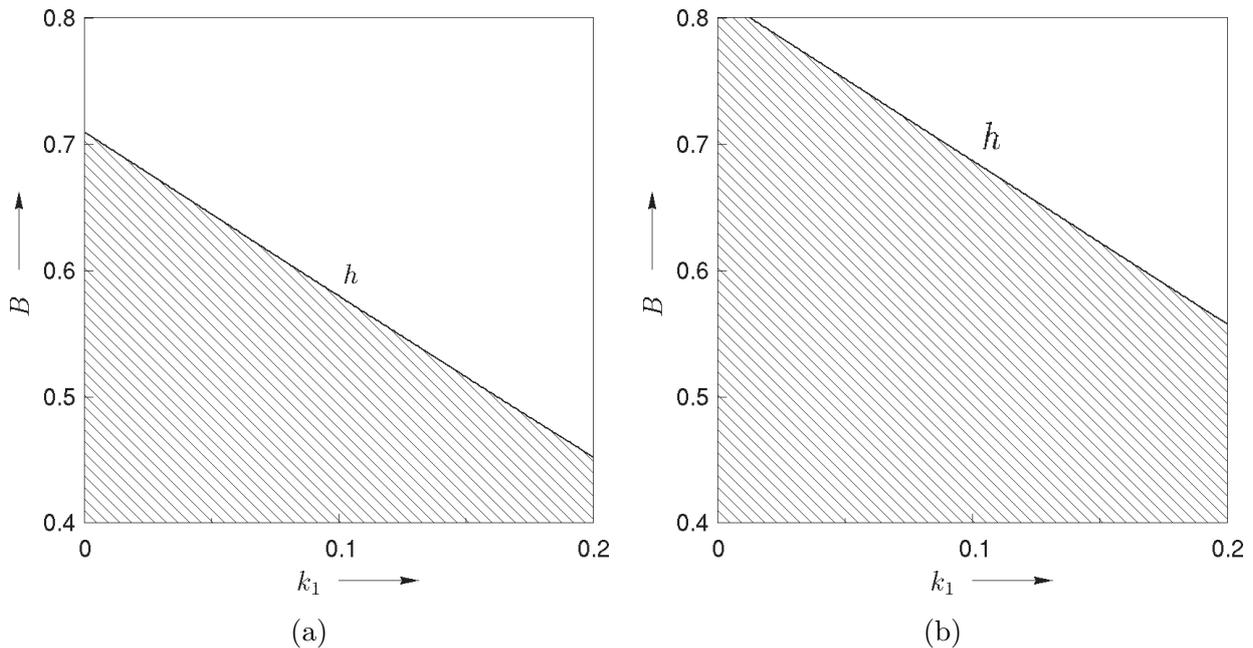


図 4.4.3 式 (4.4.8), 式 (4.4.9) によって与えられる, k_1 - B 平面における平衡点の状態変化. (a), (b) は式 (4.4.6), 式 (4.4.7) における分岐図をそれぞれ示している. 図中の h は平衡点の Hopf 分岐曲線を示し, 斜線部分では安定なリミットサイクルが観測される.

分岐曲線を示している. SW を ON にした場合, つまり式 (4.4.6) においては 3 次元自律系のためカオスが発生する可能性があるが, われわれのみた限り周期解には接線分岐以外の分岐は発生しなかった.

本章では特に $k_1 = 0.1$ とし, 解軌道が

- 式 (4.4.6), 式 (4.4.7) の両者とも安定なリミットサイクルを持つ場合.
- 式 (4.4.6) が安定平衡点, 式 (4.4.7) が安定なリミットサイクルを持つ場合.

の場合に注目し, 周期解のスイッチング周期 T , スwitching 比率 α の変化による分岐現象を解析する.

4.4.3.2 $B=0.0, B=0.5$ の場合 (準周期解と同期化)

まず, 式 (4.4.6), 式 (4.4.7) が両者とも安定なリミットサイクルを持つ場合を考える. 図 4.4.4, 図 4.4.5 に $B=0.0, B=0.5$ の場合の分岐図をそれぞれ示す.

ここで, 領域  には, 準周期解が存在している. 非周期的な解軌道の例を図 4.4.6(a) に示す. ここで, 準周期解は, 系がスイッチング周期に対して非同期であることを示している. しかし, スwitching 周期 T が式 (4.4.6), 式 (4.4.7) の安定なリミットサイクルの周期の整数倍になった場合, 位相同期によってさまざまな周期解 (同期解) が発生する. その同期化領域を領域  で示す. 図 4.4.4, 図 4.4.5 では, $G^m (m \leq 4)$ の接線分岐を示しているが, $G^m (m \geq 5)$ の接線分岐もこの領域には存在している. 以下, 基本調波に注目し, 解析を進める.

$B=0.0$, つまり直流電源を印加しない場合, 安定な 2 種類のリミットサイクルが存在する. この場合, 直流電源を零としているため, 回路が図 4.4.1 において上下方向に対称となっている. そのため 2 種類のリミットサイクルは, 3 次元直角座標で完全に原点对称となっている. 図 4.4.4 では, G^1 が一種類しかみ

られないが、これは 2 種類の接線分岐が重なっているためである。

$B = 0.5$ の場合、 $B = 0.0$ の線分のような対称性がないため、接線分岐のループは 2 重になる。 G^1 の内側の 2 つの G^1 内では 2 種類の安定な周期解が存在している。図 4.4.6(b)(c) に例を示す。 $0.0 < B < 0.5$ では、大きな変化はなく、同期領域の形状は $B = 0.5$ の場合とまったく同じである。

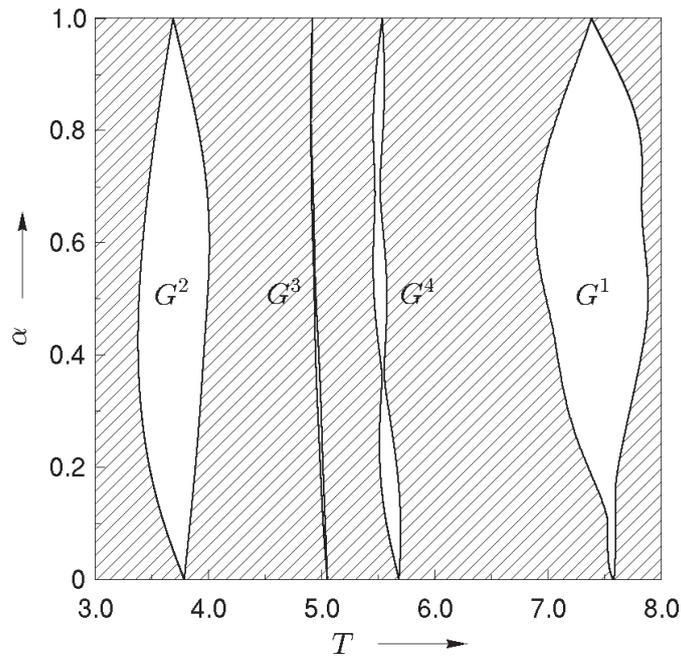


図 4.4.4 分岐図 ($B=0$) .

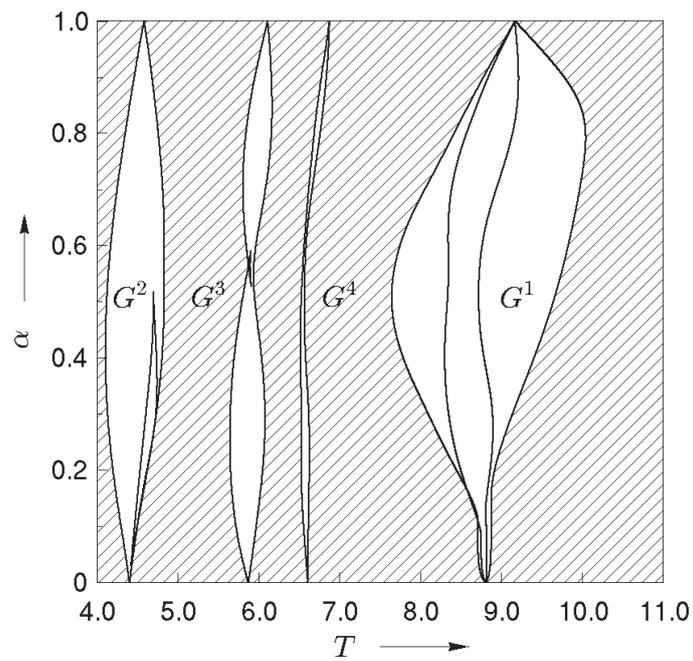
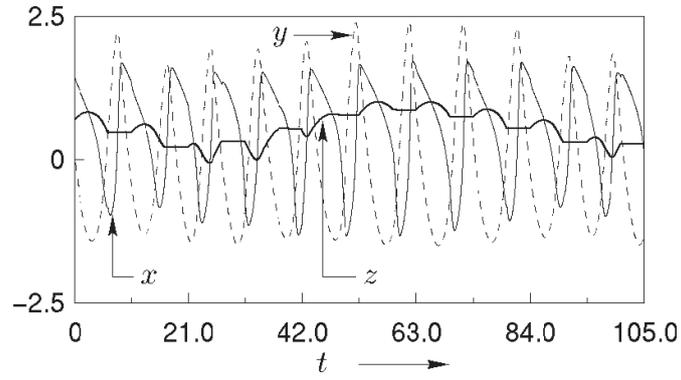
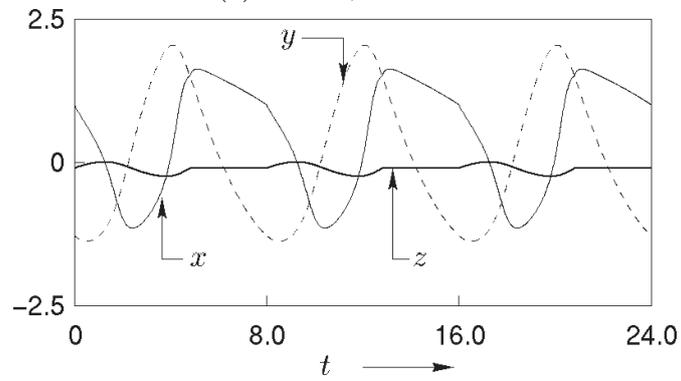
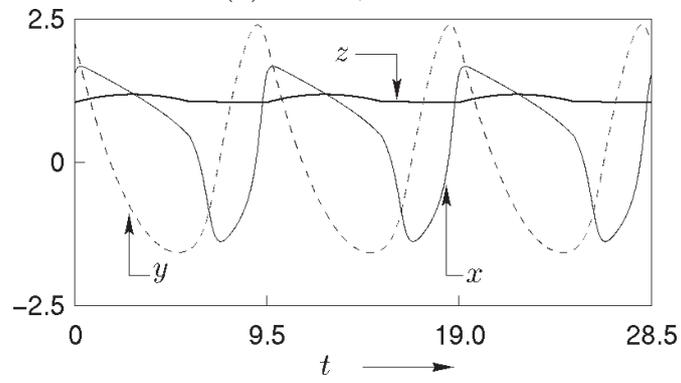


図 4.4.5 分岐図 ($B=0.5$) .

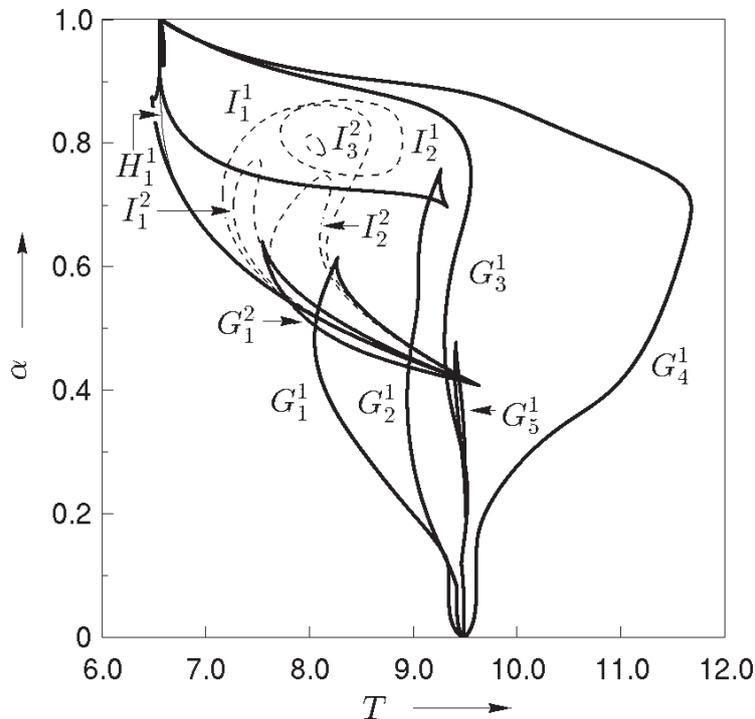
(a) $\alpha = 0.6, T = 10.5$ (b) $\alpha = 0.6, T = 8.0$ (c) $\alpha = 0.6, T = 9.5$ 図 4.4.6 波形の例 ($B=0.5$).

4.4.3.3 $B=0.58$ の場合 (カオストラクタの出現)

$B = 0.58$ の分岐図を図 4.4.7 に示す. ここで, 式 (4.4.6), 式 (4.4.7) は両者とも安定なリミットサイクルを持つが, SW が ON つまり式 (4.4.6) は平衡状態に近い解軌道を持つ. $G_1^1, G_2^1, G_3^1, G_4^1$ といった大まかな形状は, $B = 0.5$ と同様である. G_5^1 は $G_2^1-G_4^1$ 間の安定平面上で, 閉じたループとなっている. I_2^1, I_3^1 は $G_1^1-G_3^1$ 間の安定平面上に存在し, 残りの周期倍分岐曲線は $G_2^1-G_4^1$ 間に存在している.

H_1^1 および G_1^1 に囲まれた領域では, カオス状態, 準周期解, さまざまな周期解を観察することができる. 図 4.4.8 は $T = 6.55$ として α すなわちスイッチング動作の比率を変化させた一方向分岐図を示す. この図から, 様々な位相同期が発生していることがわかる. これらの位相同期解は, Neimark-Sacker 分岐曲線に沿って発生している G^i に囲まれている. さらに α を減少させると, 図 4.4.9 のようにカオス応答がみられる. これは, 準周期応答からカオス応答へ至るトーラス崩壊ルートとなっている.

$G_1^1-G_3^1$ 間において周期倍分岐の存在する付近の拡大図を図 4.4.10, $T = 8.5$ 付近での直線 l_2 に沿った多様体の模式図を図 4.4.11 に示す. I_1^1 によって発生した 2 周期解が G_1^2 により折り畳まれている. つまり, 周期点多様体が重なっている領域が存在していることがわかる. 図 4.4.12 に直線 l_1 に沿って T を変化させた一方向分岐図を示す. 周期 T の周期解が周期倍分岐 I_1^1 を横切ることにより不安定になり, 周期 $2T$ の周期解が発生する. さらに I_1^2 や I_1^3 を横切ることで周期 $4T$ の周期解が発生する. さらに周期倍分岐の連鎖によりカオスへと進展している.

図 4.4.7 分岐図 ($B=0.58$).

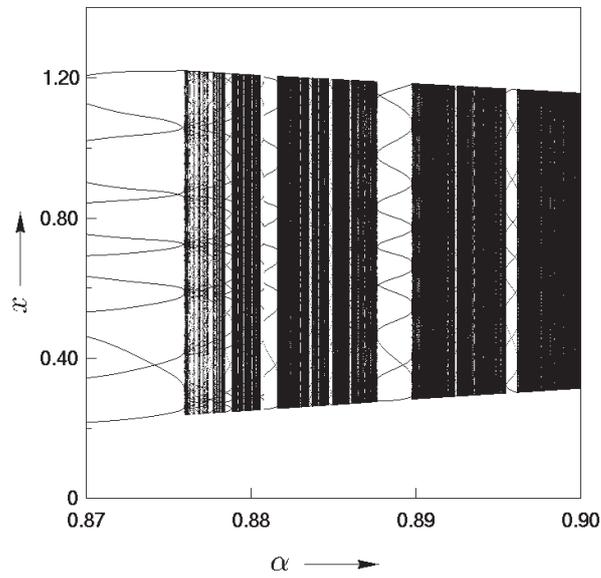


図 4.4.8 $T = 6.55$ として α を変化させた一方向分岐図.

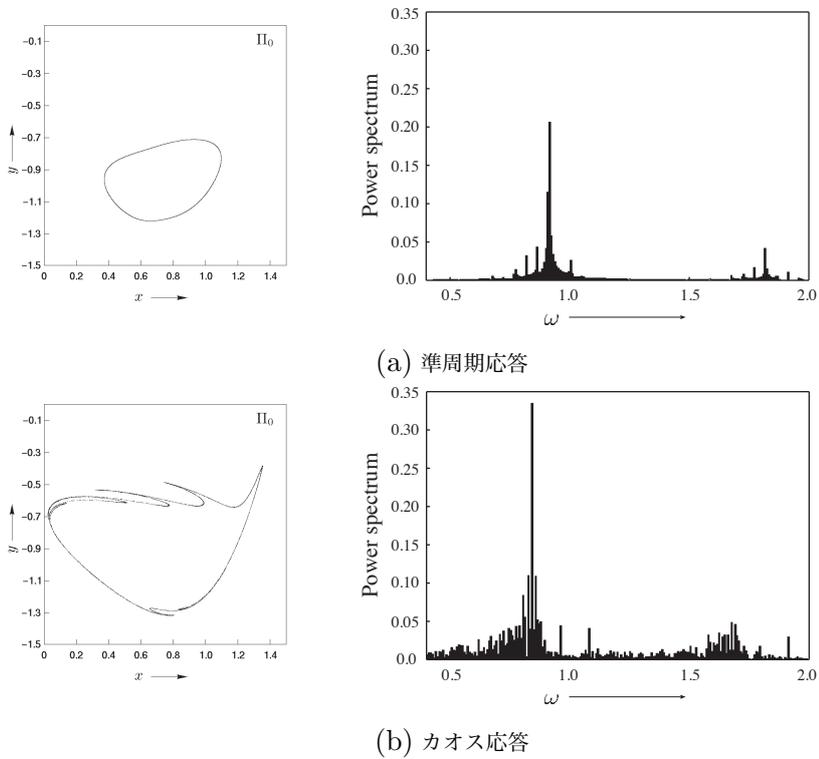


図 4.4.9 Poincaré 断面 Π_0 における T の固定点及びパワースペクトル. (a) 準周期応答, (b) カオス応答. (a) は 2 つ, (b) は多くの周波数で構成されている.

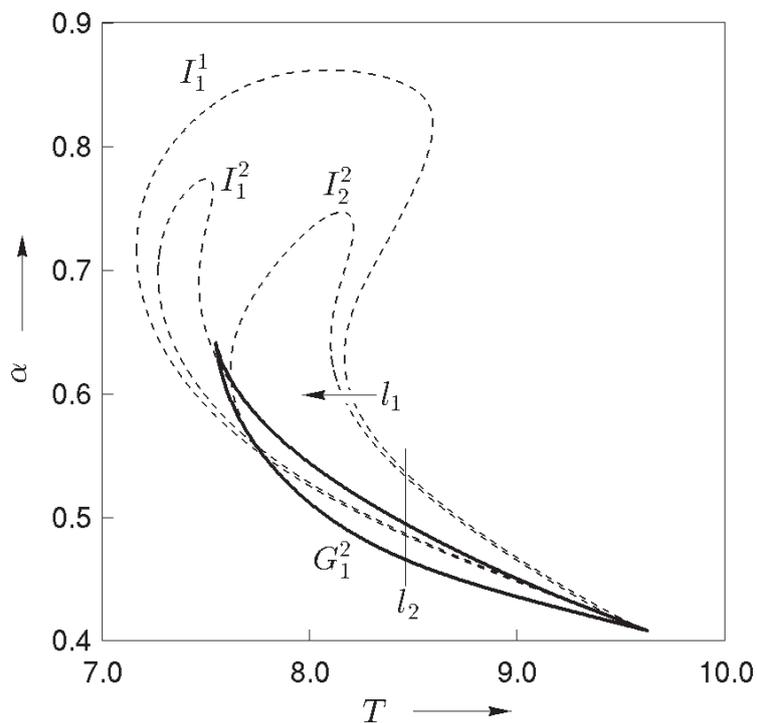


図 4.4.10 図 4.4.7 の拡大図.

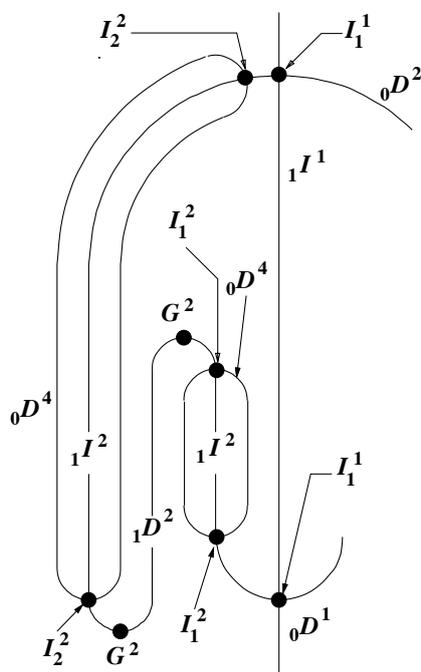


図 4.4.11 直線 l_2 に沿った模式図.

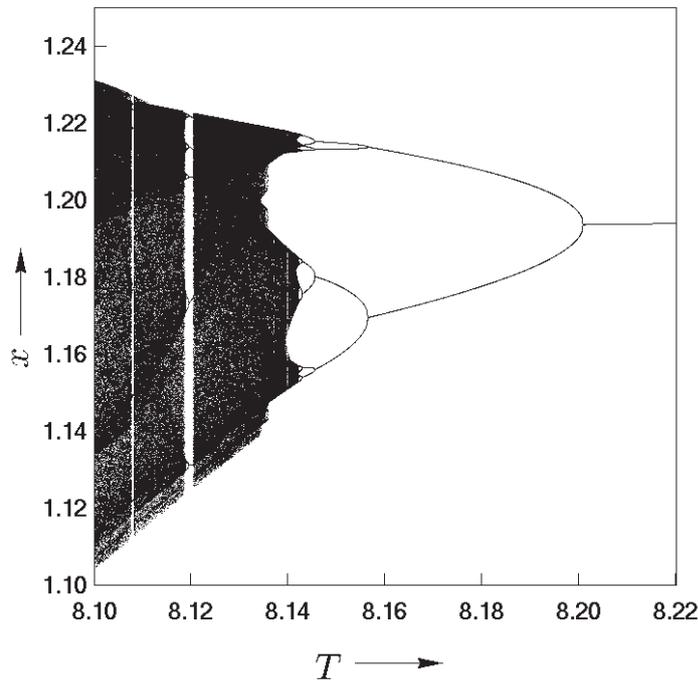


図 4.4.12 $\alpha = 0.6$ にそって T を変化させた 1 方向分岐図.

4.4.3.4 $B = 0.6, B = 0.65$ の場合 (振動現象の消滅)

$B = 0.6$ の分岐図を図 4.4.13 に示す. ここで, SW が ON, すなわち系の運動が式 (4.4.6) に従う間, 系は安定なリミットサイクルを持ち, SW が OFF のとき, 式 (4.4.7) は安定な平衡点を持つことに注意する. 4.4.3.3 節と同様に, おおまかな形状はあまり変わっていない. しかし, $B=0.58$ では, 2 種類の固定点が存在し, それらに分岐現象が生じたが, $B=0.6, B=0.65$ では新たにもう一種類の固定点が発生している. この固定点は α が大きいとき, つまりスイッチング周期 T のうち式 (4.4.6) に従う時間が長い場合発生にする. 式 (4.4.6) は安定な平衡点を解として持つため, ほとんど系全体が発振していない状態になっている. しかし, α を減少させると, H_1^1 を横切ることによって Neimark-Sacker 分岐が発生し, 2 次元不安定な固定点と安定な準周期解が発生する. 図 4.4.15 に I_3^1 周辺の拡大図を示す. ここで, 図中の矢印の方向にパラメータを変化させた際に生じる余次元 1 の分岐は以下のようなになる.

1. ${}_0D \rightarrow {}_2D$
 2. ${}_0D \rightarrow {}_1I + 2{}_0D^2$
 3. ${}_2D \rightarrow {}_1I + 2{}_2D^2$
 4. ${}_0D^2 \rightarrow {}_2D^2$
 5. ${}_1I \rightarrow {}_0D + 2{}_1D^2$
 6. ${}_1I \rightarrow {}_2D + 2{}_1D^2$
 7. $\phi \rightarrow {}_0D^2 + {}_1D^2$
- (4.4.11)

●は I_3^1 , H_1^1 , H_1^2 が接し, 2つの周期倍分岐条件の重複によって発生する P^2 分岐がみられる. 3次元系では4種類の余次元2の分岐が発生する可能性がある. 詳細は省略するが, 断続 RC 回路を持つ BVP 発振器では P^2 分岐の他に TP 分岐, T^2 分岐 という合計3種類の余次元2の分岐が存在しており, これらの分岐パラメータ近傍では複雑な系の挙動がみられる.

最後に, $B = 0.65$ の分岐図を図 4.4.14 に示す. この場合, さらに新たに発生した固定点の存在領域が広がり, H_1^1 が下にさがっている. この現象の原因として,

- SW が ON の場合に存在する平衡点がより安定になっている.
- SW が OFF の場合に存在するリミットサイクルの周期が短くなっている

が考えられる. それにともない, 他の2種類の固定点の存在領域が狭くなっている. $B > 0.687$ では SW が OFF の場合も Hopf 分岐により安定な平衡点が発生している. その結果, 式 (4.4.6), 式 (4.4.7) が両者とも発振しない. この場合, スイッチング周期, スイッチング比率をどのように変化させても安定な固定点しか発生しなかった.

4.3 節, および本適用例から, スイッチングが外力によって強制的に切り替えられる系, 特に張り合わされるシステムが2つの場合, 次のことが予想できる.

1. 両方のシステムがリミットサイクルを持つ場合, 広い領域で準周期解が存在し, 接線分岐によって位相同期した様々な周期 $l\tau$ ($l = 1, 2, \dots$) の周期解が発生する
2. 一方が安定な平衡点をもち, 他方がリミットサイクルを持つ場合, 現象が急激に複雑になりカオスも含めた様々な現象が発生する.
3. 2. の条件のとき発生する新たな固定点はほとんどの場合, 解軌道に平衡点を持つ方のスイッチング比率を下げることで Neimark-Sacker 分岐をおこす.

特に, 一方の解が安定なりミットサイクルで, 他方が平衡点の Hopf 分岐曲線に近いパラメータを持つ状態では広い領域にわたり複雑な現象が発生すると思われる.

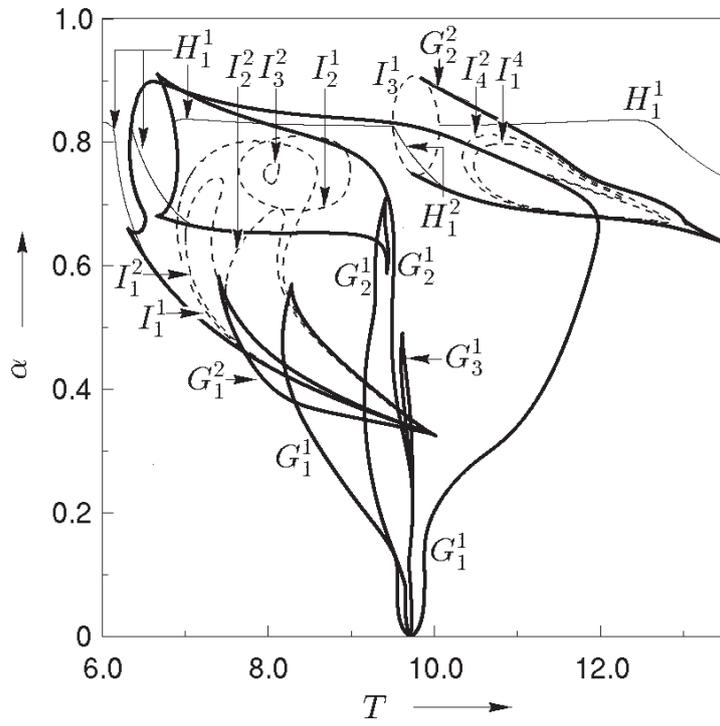


図 4.4.13 分岐図 ($B=0.6$).

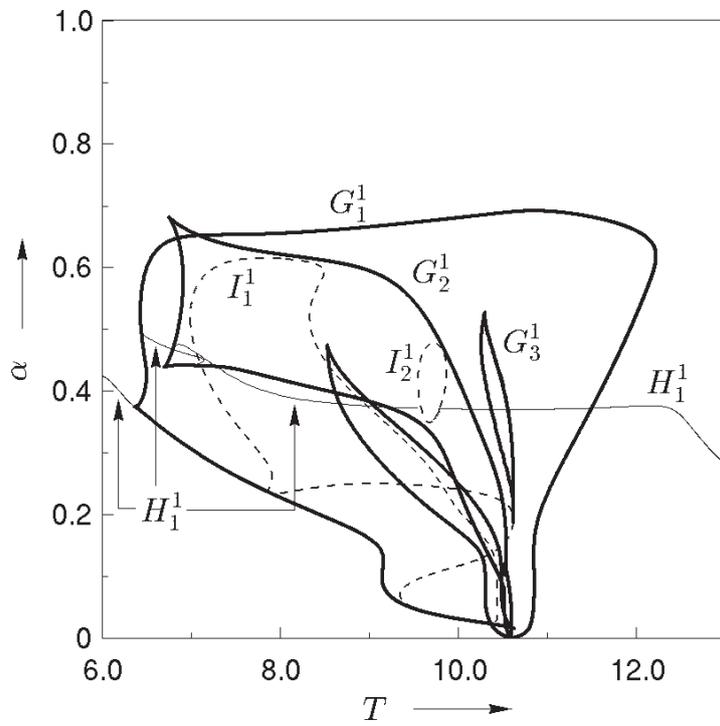


図 4.4.14 分岐図 ($B=0.65$).

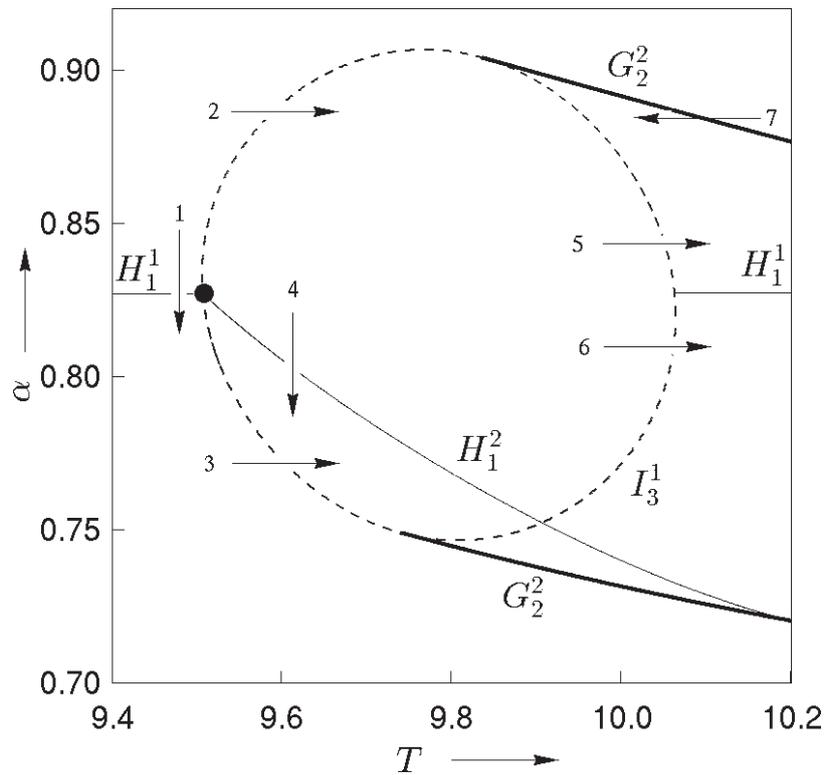


図 4.4.15 図 4.4.13 の拡大図. ●は P^2 分岐のパラメータ値を示す.

4.5 むすび

時刻依型存断続特性を有する非線形力学系における分岐曲線の追跡方法を提案した. 周期的外力の周期に合わせて, 時間的に区分して写像を定義することで, 可微分写像の合成により Poincaré 写像を表現でき, 系がなめらかでない解軌道を持つ (不可微分点を持つ) 場合でも, Poincaré 写像は微分が可能となり, 固定点の安定性を議論することが可能となった. 周期開閉スイッチを持つ 2次元非線形断続回路に関しては, 分岐図より得られた Neimark-Sacker 分岐に沿って存在する位相同期解, カオスについて検討, 回路実装を行ない, アルゴリズムの正当性も示した. 2次元自律系に周期外力で動作する断続回路を付加した 3次元非線形断続回路においては特に基本調波に注目し解析を行なったが, 結果として, Neimark-Sacker 分岐沿ってみられる様々な位相同期解の存在, 2種類のカオスへ至るルート (周期倍分岐ルート・トーラス崩壊ルート), 余次元 2 の分岐, などが得られた. さらにパラメータの変化と系に発生する解軌道に関する考察も行なった.

第 5 章

状態依存型断続特性を有する非線形力学系における分岐

5.1 まえがき

近年，電気回路におけるカオスの研究が注目され，とりわけ，Chua 回路 [2] [45]，ダイオードを含む回路 [3]，ヒステリシス特性を持つ素子を含む回路等 [46]- [49] は自律系カオス発振回路として盛んに研究されている．これらの系は区分的に線形系として記述されるため，解は区分的に厳密に求めることができる．よって，周期解の分岐やカオスの存在は，リターンマップや分岐方程式により厳密に導出可能である．

一方，滑らかな特性を持つ非線形関数で記述される力学系は，軌道の求積が解析的に不可能であるため，固定点位置や変分方程式の解を数値積分で求め，分岐集合の計算に利用する [16] [50]．その技術を応用し，前章において時刻依存型断続特性を有する力学系におけるリミットサイクルの分岐パラメータ値の追跡法を述べ，2 および 3 次元の回路を解析した．しかし，上記のような自律系カオス発振回路 (系全体が自律系で記述されスイッチング素子を含んだ系)，言い換えれば状態依存型断続特性を有する非線形力学系に対して，前章の手法は適用できない．

そこで，本章では状態依存型断続特性を有する力学系にみられるリミットサイクルの分岐パラメータの計算方法を提案する．前章で扱った時刻依存型断続特性を有する力学系は Poincaré 写像の構成が単純であるが，状態依存型断続特性を有する力学系ではリミットサイクルの周期が状態に依存することを考慮しなければならない．そこで，局所断面を方程式の切り替わる点に用意することにより，局所的座標系において可微分な Poincaré 写像を定義し，Poincaré 写像に関するヤコビ行列，特性方程式によって固定点の安定性を議論することが可能となることを示す．また，解軌道が局所断面に接することにより，2.3.2 節で述べたリミットサイクルの特性乗数と無関係に軌道の性質が変化する大域的分岐が発生する．この分岐に関しても説明を行ない，計算方法について述べる．

具体例としては，2つの半平面で定義されるヒステリシス回路に対して本手法を適用する．この系は文献 [4] と同じベクトル場を提供するが，回路は非線形抵抗を含むため厳密解を導出不可能である．解析結果としては，計算方法及び分岐図を示し，主に基本調波に関する分岐と大域的分岐に注目して解析を行った．大域的分岐は，状態に依存してベクトル場の特性が変化する区分力学系特有の分岐であり，パラメータ平面の広い領域で数多く観察され，様々な周期解やカオスが発生するための重要な役割を担っている

ると考えられる。これらの結果の一部は回路実験においても確認した。

5.2 局所的分岐の解析方法

5.2.1 問題の記述

次の m 個の不連続な非線形関数に従った n 次元自律系を考える:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (5.2.1)$$

ここで, $t \in \mathbf{R}$ は時刻, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ は状態を表す n 次元ベクトル, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r$ は $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{m-1}$ に共通なパラメータ, $\lambda_i \in \mathbf{R}^s$ は \mathbf{f}_i のみに依存するパラメータである。また, 非線形関数 \mathbf{f}_i はなめらかで各変数, パラメータに関して必要なだけ微分可能であるとする。

あるスカラー関数 $q_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ で張られる局所断面 Π_i は, 関数が不連続に切り替わる状態空間上の平面に選んでおく。

$$\Pi_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid q_i(\mathbf{x}) = 0\} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (5.2.2)$$

局所断面 Π_{i-1} を出発した軌道が, 断面 Π_i を通過したとき, 運動方程式も \mathbf{f}_{i-1} から \mathbf{f}_i へと不連続に切り替わる。このとき, 式 (5.2.1) の i 番目の非線形関数 \mathbf{f}_i に従う解軌道を

$$\mathbf{x}_i(t) = \varphi_i(t, \mathbf{x}_{i-1}, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_i) \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^\top \quad (5.2.4)$$

とする。式 (5.2.1) は区分的に自律系であるから, 各断面での初期値は次式となる。

$$\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i-1} = \varphi_i(0, \mathbf{x}_{i-1}, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_i) \quad (5.2.5)$$

以下, この系にみられるリミットサイクルの分岐パラメータを求める。

5.2.2 局所断面と Poincaré 写像

点 $\mathbf{x}_i \in \Pi_i$ を初期値とする解が, $t = \tau_i(\mathbf{x}_i)$ において Π_{i+1} と交わる点を \mathbf{x}_{i+1} , 点 $\mathbf{x}_{i+1} \in \Pi_{i+1}$ を初期値とする解が, $t = \tau_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1})$ に Π_{i+2} と交わる点を \mathbf{x}_{i+2} と仮定する。このシステムが m 個の局所断面を持ち, 解軌道が周期的であるとき, 次の m 個の写像を定義できる。

$$\begin{aligned} T_0 : \quad \Pi_0 &\rightarrow \Pi_1 \\ &\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}_1 = \varphi_0(\tau_0(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_0) \\ T_1 : \quad \Pi_1 &\rightarrow \Pi_2 \\ &\mathbf{x}_1 \mapsto \mathbf{x}_2 = \varphi_1(\tau_1(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_1) \\ &\dots \\ T_{m-1} : \Pi_{m-1} &\rightarrow \Pi_0 \\ &\mathbf{x}_{m-1} \mapsto \mathbf{x}_0 = \varphi_{m-1}(\tau_{m-1}(\mathbf{x}_{m-1}), \mathbf{x}_{m-1}, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_{m-1}) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

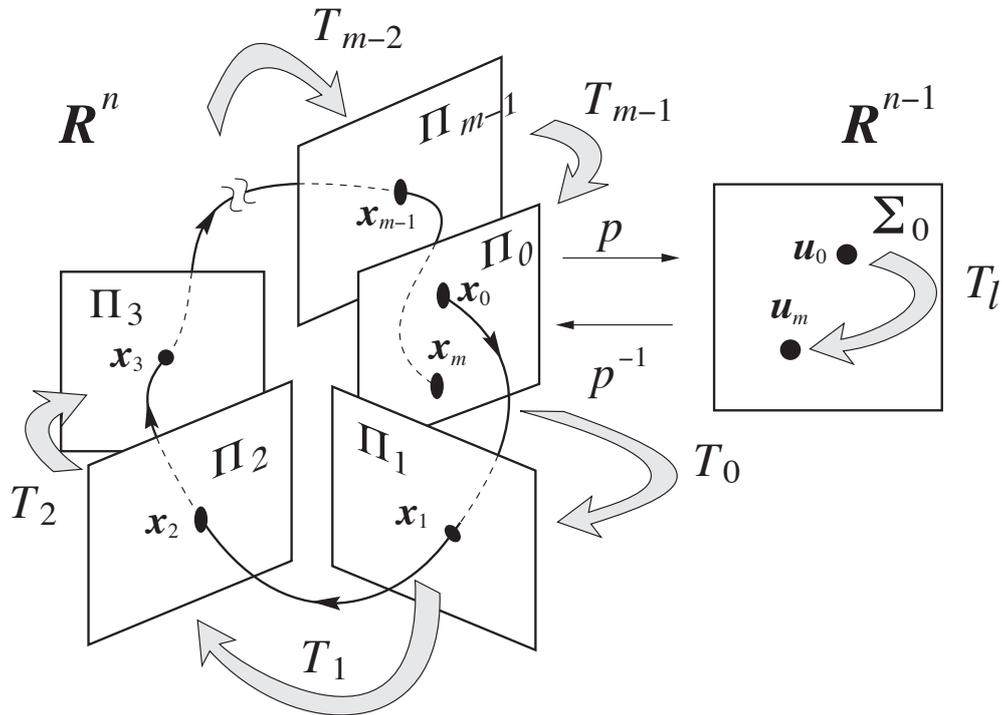


図 5.2.1 状態依存型断続特性を有する非線形力学系 (2.2 節 case a.2) における解軌道

図 5.2.1 に系の解軌道，局所断面および写像の様子を示す．このとき，リミットサイクルの周期 τ は次式となる．

$$\tau = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i \tag{5.2.7}$$

ここで，各写像 T_i の合成 T ：

$$T = T_0 \circ T_1 \circ \cdots \circ T_{m-1} \tag{5.2.8}$$

は Poincaré 写像となる．式 (5.2.8) の Poincaré 写像 を用いて差分方程式系への変換を考えるが，実際に Newton 法を用いて固定点や周期点の位置，特性乗数を計算する際には次式で示される Poincaré 写像の微分が必要となる．

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \Big|_{t=\tau} = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_i} \Big|_{t=\tau_i} \tag{5.2.9}$$

式 (5.2.9) の各要素は各々の局所的な写像の初期値に関する微分から区分的に導出可能であり，具体的には $\partial T_i / \partial \mathbf{x}_i$ は chain rule によって，

$$\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}_{i+1}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{f}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \mathbf{x}_i} \tag{5.2.10}$$

となる．ここで解軌道は，軌道が局所断面間を通過する時間に依存すると仮定している． $q_{i+1}(\mathbf{x}_{i+1}) =$

$q_{i+1}(\varphi_i(\tau_i(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_0)) = 0$ を初期値 \mathbf{x}_i で微分すると,

$$\frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{f}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right) = \mathbf{0} \quad (5.2.11)$$

である. Π_i は 1 次元の拘束条件であるから, 局所断面は $n-1$ 次元超曲面となる. また, 軌道に対して局所断面は横断的 ($\frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_i \neq 0$) であるから,

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial \mathbf{x}_i} = - \frac{1}{\frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_i} \frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (5.2.12)$$

と整理でき, よって,

$$\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{\frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_i} \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial q_{i+1}}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (5.2.13)$$

を得る. ここで $\partial \varphi_i / \partial \mathbf{x}_i$ は変分方程式の解である. したがって, 系に発生する周期解に関して複数の局所断面がある場合, 各区間において, 変分方程式の解を I_n を初期値として次の断面まで求積, 記憶し, 各区間における式 (5.2.13) の解を導出し, 最後にそれらの積を取ったものは, 式 (5.2.9) で示される Poincaré 写像の微分となっている. パラメータによる微分も同様に導出可能である.

さらに以下に述べる局所断面上の $n-1$ 次元局所座標系を導入し, 分岐問題を考える. まず, Π_0 の局所座標として $\mathbf{u} \in \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1}$ を,

$$x_{01} = u_{01}, \dots, x_{0(n-1)} = u_{0(n-1)}, x_{0n} = s(u_{01}, \dots, u_{0(n-1)}) \quad (5.2.14)$$

によって埋め込んだとし, 埋め込み写像 p^{-1} , 射影 p を,

$$p^{-1} : \Sigma \rightarrow \Pi_0, p : \Pi_0 \rightarrow \Sigma \quad (5.2.15)$$

と定義する. このとき, 局所座標上での Poincaré 写像 T_ℓ は

$$T_\ell : \Sigma \rightarrow \Sigma; \mathbf{u} \mapsto p \circ T \circ p^{-1}(\mathbf{u}) \quad (5.2.16)$$

で表される. Σ 上での T_ℓ の微分は次式となる.

$$\frac{\partial T_\ell}{\partial \mathbf{u}_0} = DT_\ell(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial p^{-1}}{\partial \mathbf{u}} \quad (5.2.17)$$

式 (5.2.17) の特性方程式は,

$$\chi_\ell(\mu) = \left| \frac{\partial T_\ell}{\partial \mathbf{u}_0} - \mu \mathbf{I}_{n-1} \right| = 0 \quad (5.2.18)$$

となる. この Jacobi 行列に関する特性乗数は固定点の安定性と一致する.

ところで, 本手法に似た手法として, 不安定度の高い微分方程式系を解く場合 multiple shooting 法 [51] が用いられるが, この手法は解軌道を適当に分割し, 次式を用いて合成写像を構成する.

$$\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (5.2.19)$$

系が不連続な場合、関数が不連続に切り替わる状態空間上の平面に解軌道の分割場所を選び、文献 [51] の手法を適用すると、式 (5.2.9) で示される特性方程式は次式となる。

$$\left| \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_i} \Big|_{t=\tau_i} - \mu \mathbf{I}_n \right| = 0 \quad (5.2.20)$$

文献 [51] の手法を状態依存型断続特性を有する非線形力学系に適用すると、式 (5.2.20) の n 個の根は固定点の持つ特性乗数と一致しないことに注意しなければならない。これは、リミットサイクルの周期が状態に依存することを考慮していないためと考えられる。

5.2.3 分岐パラメータ計算法

分岐パラメータの計算には、式 (5.2.18) を固定点条件と連立させ、 \mathbf{u} , λ について解けばよい。

$$F(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{bmatrix} T_\ell(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \\ \chi_\ell(\mu) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.2.21)$$

式 (5.2.21) では、周期 $\tau(\mathbf{x}_0)$ は Newton 法には陽に関与しておらず、周期の算出は Newton 法が終了した時点の周期軌道の積分時間で知ることができる。この際用いる変分系の各要素は、式 (4.2.11) の基本行列解を、数値積分によって各々 $t=0$ から $t=\tau_i(\mathbf{x}_i)$ まで求めるとよい：

5.3 大域的分岐の解析方法

時刻・状態混合型断続特性、状態依存型断続特性を有する力学系のみが発生する分岐として、局所断面を横断していた解軌道の一部が断面に接し、解軌道が消滅する分岐現象が発生する。この分岐は、区分線形系においてはヒステリシス特性を持つ回路 [4] 等においても観測されており、状態依存型断続特性を有する力学系では広く観測されることが予想される。

今、関数 f_i に解軌道が従うとき、 \mathbf{x}_{ij} が局所断面に接し分岐が発生すると仮定と、以下の計算を行なえばよい。

$$\begin{cases} T^n(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{ij}|_{t=\tau_i} = a \\ \frac{d\mathbf{x}_{ij}}{dt} \Big|_{t=\tau_i} = 0 \end{cases} \quad (5.3.1)$$

これを $\mathbf{x}_0, \tau_i, \lambda$ について解けばよい。ここで $\mathbf{x}_{ij} = a$ は局所断面であり、 $\tau_k (k \neq i)$ は従属変数になっていることに注意する。大域的性質による分岐は特性乗数にまったく依存しない。このことから Newton 法を用いる際、特性乗数に関する方程式を解く必要がなくなるため第 2 変分方程式を求める必要はなく、5.2 節で示した局所的分岐の計算法に比べて比較的容易に計算可能である。

5.4 状態依存型断続特性を有する Alpazur 発振器

具体的な解析例として、図 4.3.1 に示す Alpazur 発振器にみられる分岐現象について考える。スイッチ SW は状態に依存してスイッチング動作を起こすと仮定する。このとき、スイッチの位置により 2 つの半平面が定義できるが、これら 2 つの半平面には重なりがある場合を考える。この問題は文献 [4] 等のヒステリシス回路から導かれる問題と同様な力学系である。

以下、Alpazur 発振器の解軌道が周期的であるとし、周期解 (同期振動) について考察する。

5.4.1 回路方程式とスイッチング動作

適当に変数変換を施した回路方程式は次式となる。スイッチが a 側に接続されている場合の回路方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_1)y - \frac{1}{3}y^3 + B_1 \end{cases} \quad (5.4.1)$$

スイッチが b 側に接続されている場合の回路方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_2)y - \frac{1}{3}y^3 + B_2 \end{cases} \quad (5.4.2)$$

となる。回路方程式は式 (4.3.1) および式 (4.3.2) とまったく同じであるが、回路方程式を切り替えるスイッチング動作がまったく異なっている。

2 つの半平面のスイッチ SW の動作を考える。2 つの半平面とその境界を

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y \geq h\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y \leq b\} \\ \partial H &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = h\} \\ \partial B &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = b\} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

とする。ここで、 $b > h$ であり、 H と B は $h \leq y \leq b$ の部分で重なっていると仮定する。スイッチの動作は、 H 上の式 (5.4.1) の流れと B 上の式 (5.4.2) の流れがそれぞれ境界に達したとき、切り替えるように働くと仮定する。つまり、

1. 初期値 (x_0, b) の解 $(x(t), y(t))$ は H 上で式 (5.4.1) に従う。解が ∂H を横断的に横切るとき、解は ∂H 上で半平面 B 上の運動となる。
2. 同様に B 上の式 (5.4.2) に従う運動は ∂B に達したとき、 H 上の運動に切り替わる。

このような動作を断続的に繰り返すものとする。この様子を図 5.4.1 に示す。ここで、すべてのスイッチング動作は理想的であるとし、時間遅れなどはないものとする。

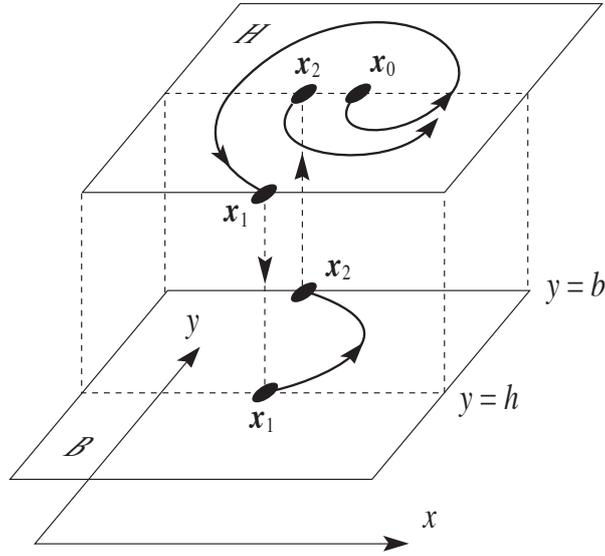


図 5.4.1 スイッチング動作と解軌道.

5.4.2 局所座標上の Poincaré 写像

H および B 上の解軌道をそれぞれ次のように定義する.

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_0(t, \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}) \\ y(t) = \phi_0(t, \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}) \end{cases} \quad (5.4.4)$$

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_1(t, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}) \\ y(t) = \phi_1(t, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}) \end{cases} \quad (5.4.5)$$

ここで, $\mathbf{u} = (x, y)^\top$ である. 局所断面は, 関数が不連続に切り替わる状態空間上の平面に選ぶため, 条件式 (5.4.3) より次の断面が定義できる.

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \{\mathbf{u} \in B \mid q_0(\mathbf{u}) = y - b = 0\} \\ \Pi_1 &= \{\mathbf{u} \in H \mid q_1(\mathbf{u}) = y - h = 0\} \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

式 (5.4.6) より各々の局所的な写像は

$$\begin{aligned} T_0 : \Pi_0 &\rightarrow \Pi_1 \\ x_0 &\mapsto x_1 = \varphi_0(\tau_0(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}) \\ y_0 &\mapsto y_1 = h \\ T_1 : \Pi_1 &\rightarrow \Pi_0 \\ x_1 &\mapsto x_2 = \varphi_1(\tau_1(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}), \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}) \\ y_1 &\mapsto y_2 = b \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

したがって、Poincaré 写像は

$$T = T_1 \circ T_0 \quad (5.4.8)$$

であり、周期は $\tau = \tau_0 + \tau_1$ となる。

埋め込み写像 p^{-1} 、射影 p を次式で定義する、

$$\begin{aligned} p &: \Pi_0 \rightarrow \Sigma; \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto w = x \\ p^{-1} &: \Sigma \rightarrow \Pi_0; w = x \mapsto \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

したがって、局所座標上での Poincaré 写像 T_ℓ の初期値に関する微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\ell}{\partial \mathbf{w}_0} &= \frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_0} \frac{\partial p^{-1}}{\partial \mathbf{w}} \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} - \frac{f_0}{g_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_0} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \frac{f_1}{g_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

式 (5.4.10) の特性方程式は

$$\chi_\ell(\mu) = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} - \frac{f_0}{g_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_0} \right) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \frac{f_1}{g_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \right) - \mu = 0 \quad (5.4.11)$$

ここで式 (5.4.10) はスカラー値をもつことに注意。

5.4.3 スイッチング動作が無い Alpacur 発振器

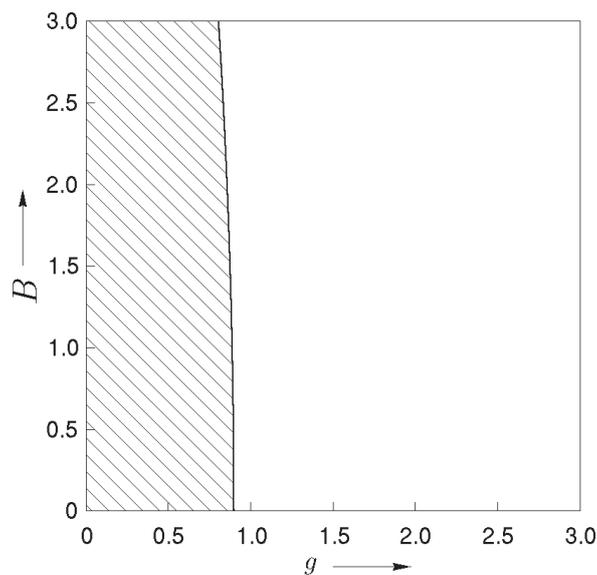


図 5.4.2 g, B の変化による発振器の状態変化. 図中の曲線は平衡点の Hopf 分岐を示す ($r = 0.1$).

g - B 平面における単体の Alpazur 発振器の分岐図を図 5.4.2 に再び示す。ここで、 $k = 0.1$ である。

領域  : 安定なリミットサイクルを持つ

領域  : 安定な平衡点を持つ

であり、図中の曲線は g - B 平面における平衡点の Hopf 分岐を示す。ここで、各パラメータは次のように設定した。

$$k = 0.1, g_1 = 0.2, g_2 = 2.0 \quad (5.4.12)$$

この場合、式 (5.4.1) は安定なリミットサイクル、式 (5.4.2) は安定な平衡点をそれぞれ持つ。Alpazur 発振器は様々な周期解を持つが、例として図 5.4.3 に大域的分岐が発生する近傍の周期解を、図 5.4.4 にカオスアトラクタを示す。状態平面において、周期解が発生するおおよその位置は式 (5.4.1) が解軌道としてもつリミットサイクルの位置によって決まり、直流成分 B に大きく影響されている。

5.4.4 周期解とその安定性

本システムには様々な種類の周期解が存在するが、各半平面における解軌道の性質の違いから周期解の分類を行なう。

半平面 H 上を運動する解軌道は次の 2 種類に分類される。

- H_S (Sliding): 半平面 H 上の $\Pi_0(y = b)$ を初期値とし出発した解軌道が $\frac{dy}{dt} \neq 0$ を満たし、 $\Pi_1(y = h)$ に到達する場合。
- H_R (Rotating): 半平面 H 上の $\Pi_0(y = b)$ を初期値とし出発した解軌道が $\frac{dy}{dt} = 0$ を少なくとも一度以上満たし、 $\Pi_1(y = h)$ に到達する場合。

例えば、図 5.4.3(c) は $H_R^1 H_S^1$ 周期解であり、周期は 2 となる。 Π_0 上を出発した解軌道は H_R もしくは H_S を経て半平面 B 上に移動する。5.4.3 節で述べたように、式 (5.4.2) は安定な平衡点を持つため、システム全体にリミットサイクルが発生するためには H_S により半平面 B に移動した後、必ず $y = b$ を横断的に通過しなければならない。もしそうでなければ、解軌道は安定な平衡点に落ち着き 2 度とスイッチング動作が発生しなくなってしまうためである。図 5.4.5 に上記の大域的分岐の発生する様子を示す。半平面 B が解軌道として安定な平衡点を持つため、あるパラメータのとき解軌道が太い実線、 $\mathbf{u}_2 = T(\mathbf{u}_0)$ で示されたとすると、このパラメータにわずかなパラメータ変化を加えることで Π_1 に解軌道が接し、その結果スイッチング動作が行なわれなくなる。この場合、解軌道は太い点線で示すように安定な平衡点 \mathbf{u}_e に落ち着いている。

ここで、 $(H_R^l H_S^m)^n$ 周期解の安定性は合成写像 $T_\ell^n(\mathbf{u}_0)$ の微分値によって決定される。

定義 $(H_R^l H_S^m)^n$ 周期解を

- $|\mu| < 1$ ならば、安定周期解 (記号 S で略記)
- $\mu > 1$ ならば、正不安定周期解 (記号 D で略記)
- $\mu < -1$ ならば、逆不安定周期解 (記号 I で略記)

と呼ぶ. ここで μ は

$$\mu = \frac{\partial T_\ell^n}{\partial w_0} \quad (5.4.13)$$

である.

$(H_R^l H_L^m)^n$ 周期解の分岐は μ がスカラー値であるため次の 3 種類のみが発生する.

- **接線分岐:** $\mu = 1$ で生じる.
- **周期倍分岐:** $\mu = -1$ で生じる.
- **大域分岐:** 軌道の一部が局所断面に接することで生じる.

ここで, 解軌道が Π_0 もしくは Π_1 に接するとき, スイッチング動作はおこらないと仮定する.

具体的に上記の分岐は, 分岐パラメータ $\lambda = \lambda_0$ の前後について, 次の関係式が成り立つことをいう.

- 接線分岐:

$$\emptyset \Leftrightarrow \{D - \text{type}(H_R^l H_S^m)^n\} + \{S - \text{type}(H_R^l H_S^m)^n\} \quad (5.4.14)$$

- 周期倍分岐:

$$S - \text{type}(H_R^l H_S^m)^n \Leftrightarrow \{I - \text{type}(H_R^l H_S^m)^n\} + \{S - \text{type}(H_R^l H_S^m)^{2n}\} \quad (5.4.15)$$

- 大域的分岐:

$$(H_R^l H_S^m)^n \Leftrightarrow \emptyset \quad (5.4.16)$$

ここで, \Leftrightarrow は分岐の前後を表す分岐式を, \emptyset は固定点が存在しない状態を示す. 断続動作特性を有する非線形力学系において, ある周期解に大域的分岐が発生した場合, 新たにどのような周期解が発生するかはまったく予測できない.

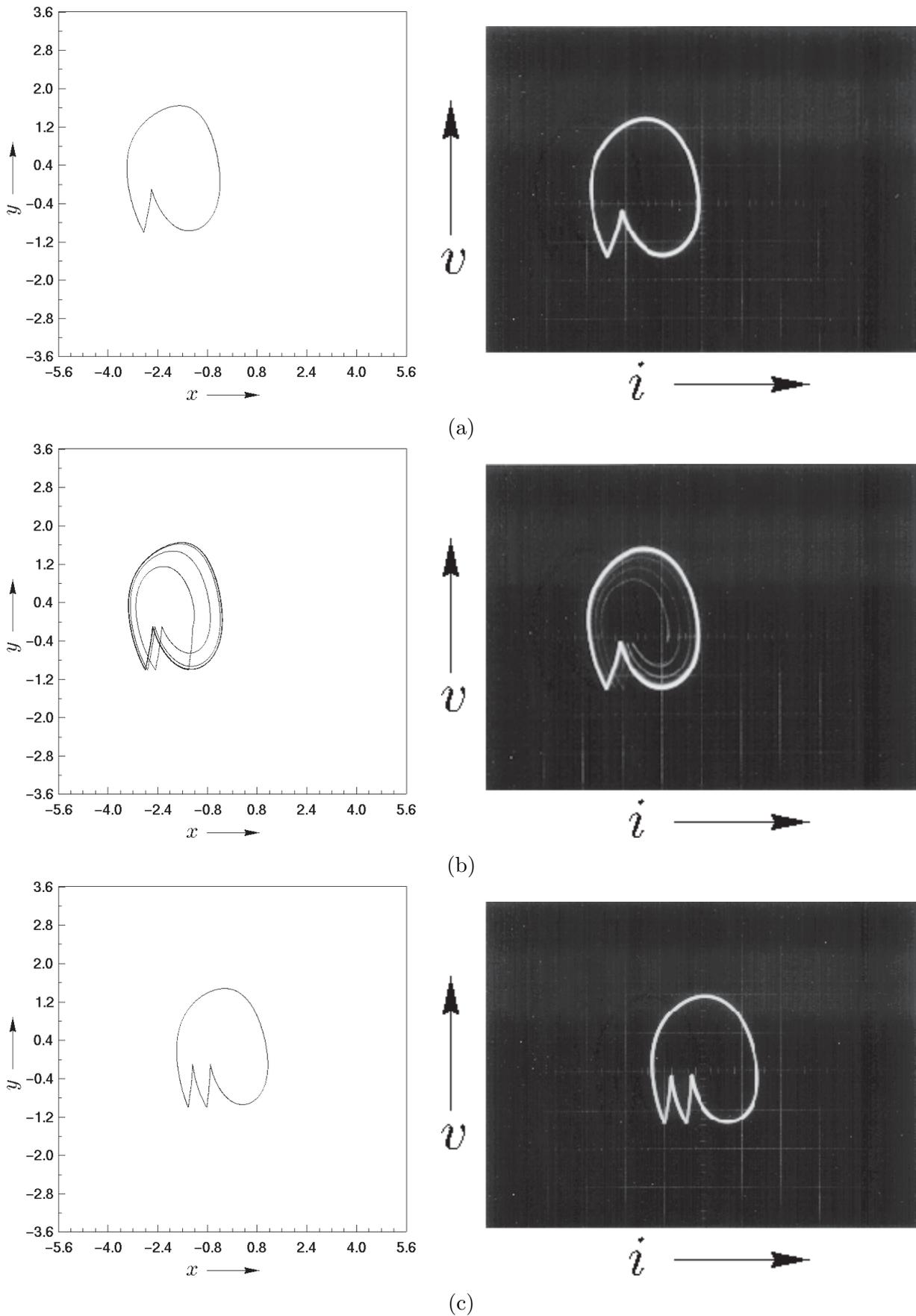


図 5.4.3 コンピュータシミュレーションおよび回路実装 1. 大域的分岐近傍の安定な周期解 ($B_2=5.0$). (a) H_R^1 周期解 ($B_1=1.86$), (b) $H_R^4 H_S^1$ 周期解 ($B_1=1.8$), (c) $H_R^1 H_S^1$ 周期解 ($B_1=0.145$).

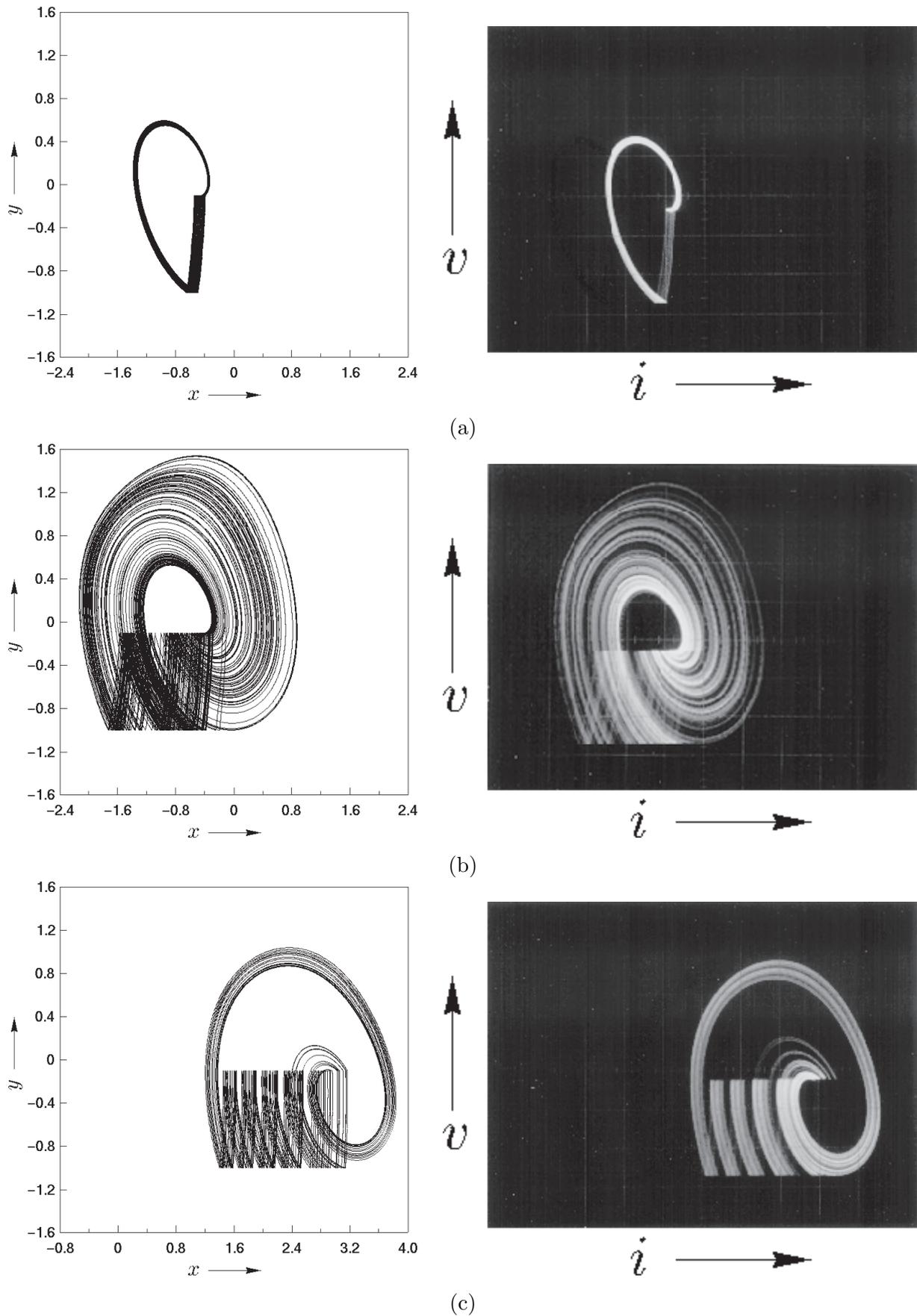


図 5.4.4 コンピュータシミュレーションおよび回路実装 2. カオスアトラクタ ($B_2=5.0$).
 (a) $B_1=0.56$, (b) $B_1=0.5$, (c) $B_1=-2.8$.

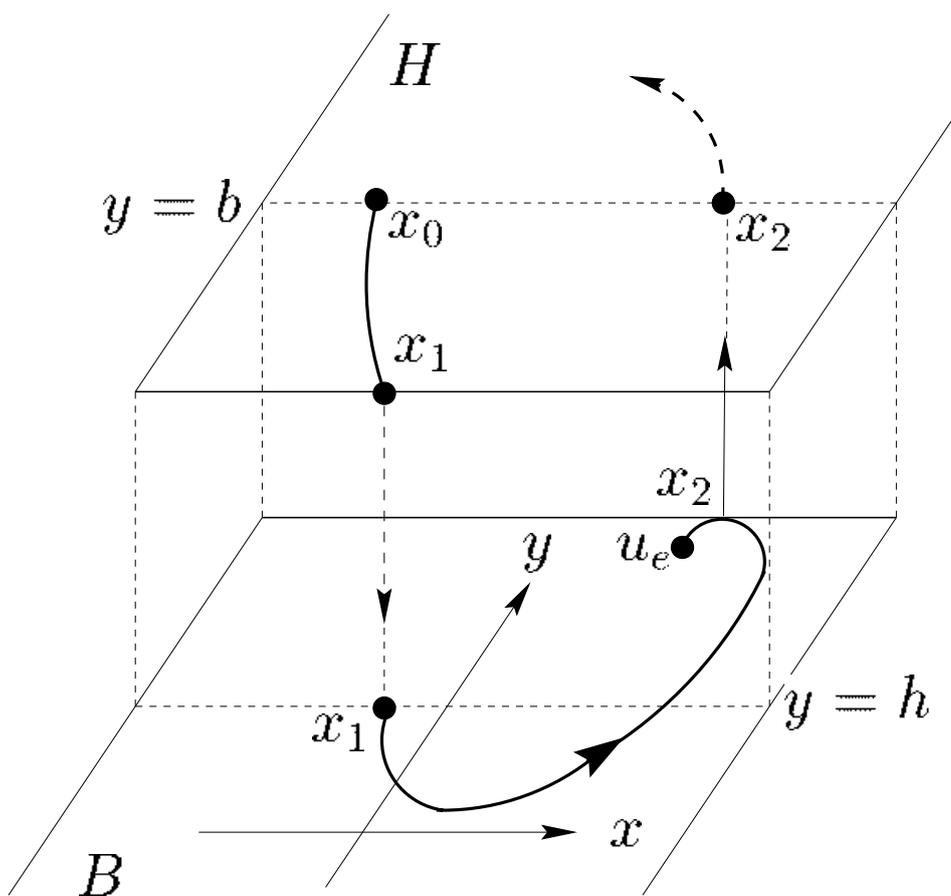


図 5.4.5 大域的分岐の様子.

5.4.5 解析結果

以下に示す分岐図において、 n 周期点の分岐集合の記号は 4.3.3 節と同様のものを用いる。大域的分岐は GB_k^n を用いた。ここで、 k は同じ周期の分岐現象を区別するために用いている。

図 5.4.6 に B_1 - B_2 平面において広い範囲に存在している分岐曲線を示す。様々な周期解の分岐曲線が存在し、接線分岐はカusp点を含んでいる。ここで GB_2^1 , GB_3^1 を除いた他の大域的分岐は解軌道の一部が $y = b$ に接することにより発生している。 $B_2 \simeq -2.0$, 例えば GB_2^1 , GB_3^1 より B_2 が小さい領域では、解軌道が $y = h$ に接することにより大域的分岐が起こる。式 (5.4.2) は解軌道として安定な平衡点を持つため、結果的に再びスイッチングが起こることなく解軌道は平衡点に落ち着く。図 5.4.7 に GB_2^1 による安定 H_R^1 周期解の消滅した際の状態平面図を示す。解軌道は安定平衡点 u_e に落ち着いている。式 (5.4.2) が解軌道として安定な平衡点を持つ場合、解軌道が周期的であるためには $(H_R^l H_S^l)^n$ ($l, n > 1$) 周期解でなければならないことがわかる。図 5.4.6 では、3 周期点以下の分岐曲線を示したがこれら以外にも多くの分岐曲線が存在している。

図 5.4.8 に $B_1, B_2 > 0$ の領域の拡大図を示す。領域  には、図 5.4.9 のような安定な 2 種類の安定 H_R^1 周期解が存在している。この領域では状態の初期値によりどちらの周期解に落ち着くかが決まる。外側の安定 H_R^1 周期解は、 G_2^1 を横切ると、式 (5.4.14) により正不安定 H_R^1 周期解と癒着消滅する。もしくは、図 5.4.3(a) の状態から GB_1^1 を横切ること、式 (5.4.16) により安定 H_R^1 周期解は消滅す

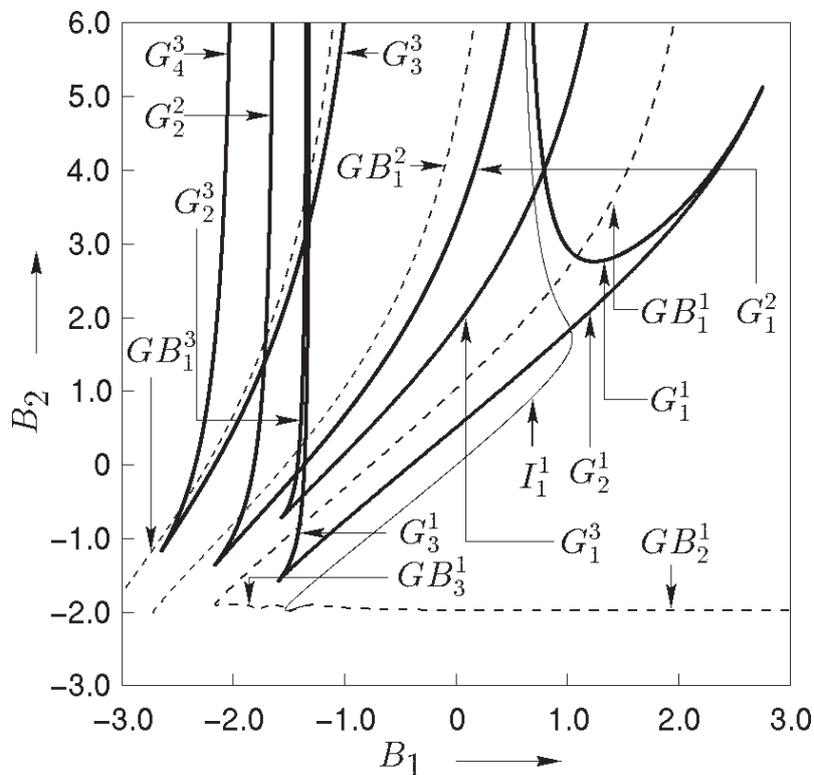


図 5.4.6 B_1 - B_2 平面における分岐図。

る。内側の安定 H_R^1 周期解は、 G_1^1 を横切ると、上記と同じように正不安定 H_R^1 周期解と癒着消滅する。もしくは、 I_1^2 を横切り、式 (5.4.15) により安定 $(H_R^1)^2$ 周期解および逆不安定 H_R^1 周期解が発生する。さらに、周期倍分岐の連鎖によって、図 5.4.4(a) に示す周期解が発生する。この周期解のリアプノフ指数は約 0.1 であり、カオスアトラクタである。

このカオスはパラメータをわずかに変化させることでスイッチング動作により図 5.4.4(b) に示す他の種類のカオスへと変化する。なお、リアプノフ指数は特性乗数がスカラー値のため、次式を用い容易に計算可能である。

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k} \log \|DT_\ell^k\|, \quad (5.4.17)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ は Euclidean norm であり、 t_k は解軌道が局所断面 Π_0 から再び Π_0 へと戻って来るまでの時間を示している。

図 5.4.10 に直線 δ に沿って B_2 を変化させた 1 方向分岐図、図 5.4.11 にそのリアプノフ指数を示す。図 5.4.10 からわかるように、広い領域で非周期的な解軌道が存在しているが、この解が位相同期することで、さまざまな $(H_R^l H_S^m)^n$ 周期解が存在している。具体的には、接線分岐 G_k^n もしくは大域的分岐 GB_k^n を経ることによって位相同期が消滅し、非周期的な解軌道になる。ほとんどの場合、非周期的な解軌道のリアプノフ指数も正であり、カオスであると思われる。

次に不連続非線形力学系のみを観測される現象に注目する。図 5.4.12 に図 5.4.6 の拡大図を示す。この領域では周期倍分岐曲線と大域的分岐曲線が交わっている領域があり、狭い範囲に様々な大域的分岐曲線が存在している。さらに、大域的分岐によってどのような解軌道が発生するかはまったくわからないため解析は困難である。そこで、図 5.4.12 の場合についてのみ考える。直線 η に沿った一方向分岐図を図 5.4.13 に示す。安定 H_R^1 周期解は I_1^1 を横切ることにより逆不安定になり安定 $(H_R^1)^2$ 周期解が発生する。その後、パラメータ平面において GB_2^2 を横切ることによって $(H_R^1)^2$ 周期解は消滅し、安定 H_R^2 周期解が発生する。さらに、 GB_4^1 、 GB_3^3 を横切ることによって、安定 $H_R^2(H_R^1)^2$ 周期解、安定 $H_R^2(H_R^1)^6$ 周期解がそれぞれ発生する。図 5.4.13 からわかるように、ある周期解が存在しその周期解が局所断面に接し大域的分岐を起こした場合、ある程度以前の周期解の形状を保つことが分る。このような分岐の形状の保存は、大域的分岐によりある周期解が他の周期解に分岐するときほとんどの場合あてはまる。

分数調波の例として図 5.4.14 に $H_R^1 H_S^2$ 周期解の分岐図を示す。 G_3^2 と GB_2^2 が結び付くなどこれまでに報告されていない分岐現象が発生しており興味深い。 G_2^2 、 G_3^2 に囲まれた領域内には周期倍分岐 I_2^2 が存在しており、 $(H_R^1 H_S^2)^2$ 周期解がさらに大域的分岐をおこすなどしているため現象がより複雑になっている。さらに B_1 が小さい領域では $H_R^1 H_S^3$ 、 $H_R^1 H_S^4$ などの存在も確認している。これらの領域の詳細な解析は今後の課題としたい。

状態に依存したスイッチを持つ系に関しては特にスイッチング動作のおこる位置が重要であると考えられる。本適用例では、解軌道として式 (5.4.1) は安定なリミットサイクル、式 (5.4.2) は安定な平衡点を持つが、例えば解軌道として式 (5.4.1)、式 (5.4.2) とともに安定リミットサイクルを与えるパラメータを選んだ場合、斉藤等が示した文献 [4] に比較的近い結果が得られると考えられる。

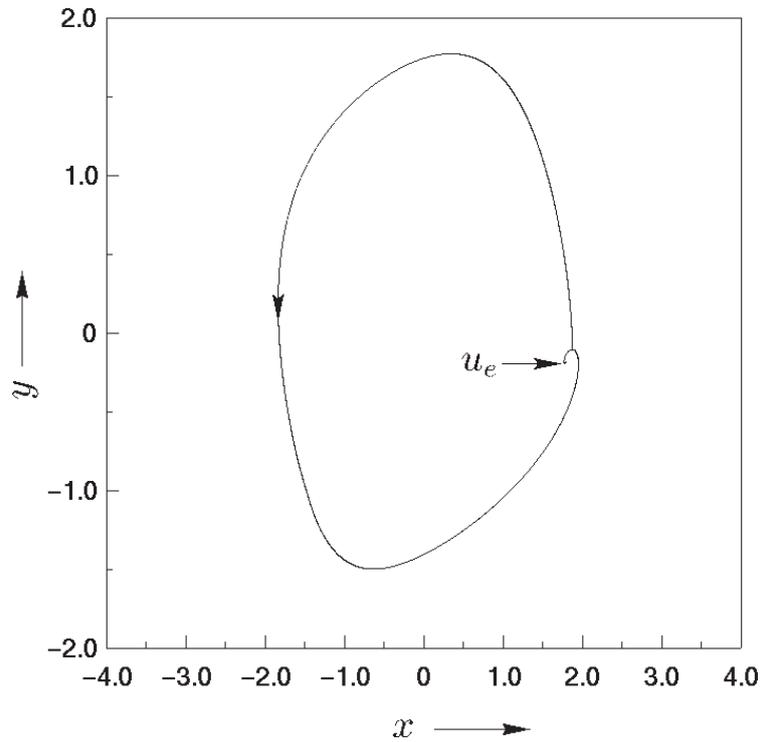


図 5.4.7 GB_2^1 による H_R^1 周期解の消滅. 解軌道は安定平衡点 u_e に落ち着いている ($B_1 = 0.1$, $B_2 = -1.976$, $u_e = (1.795, -0.179)^T$).

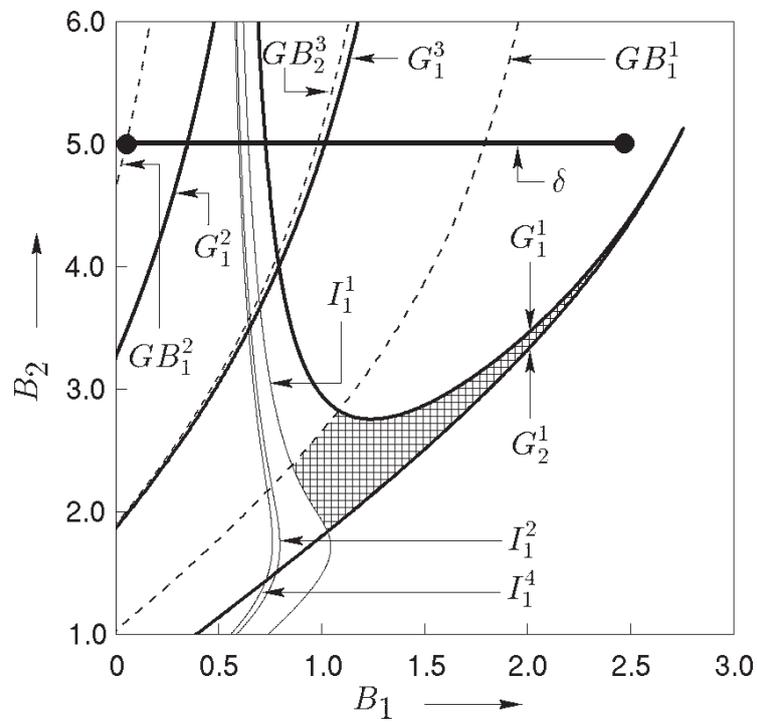


図 5.4.8 図 5.4.6 の拡大図 1.

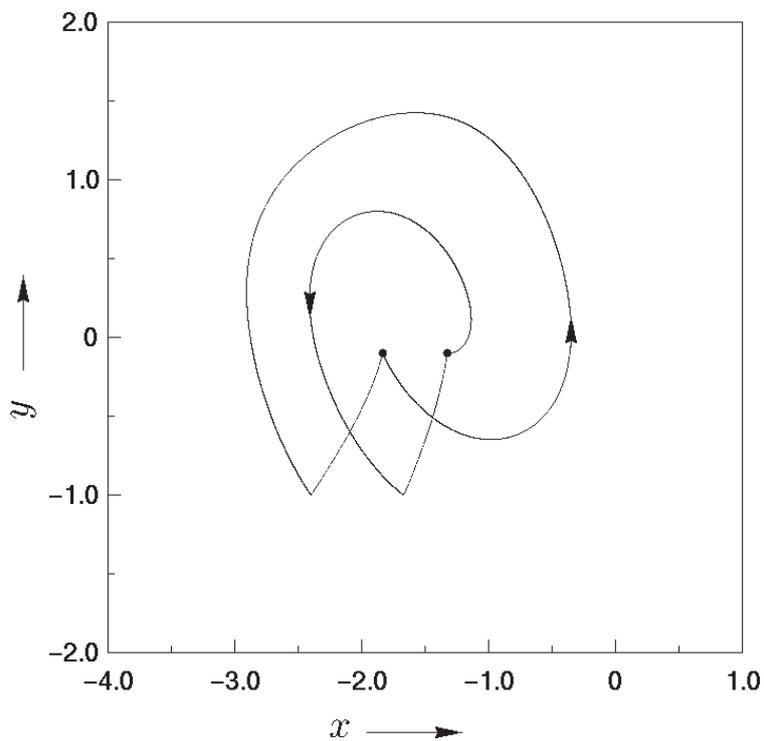


図 5.4.9 2 種類の安定な H_R^1 周期解.

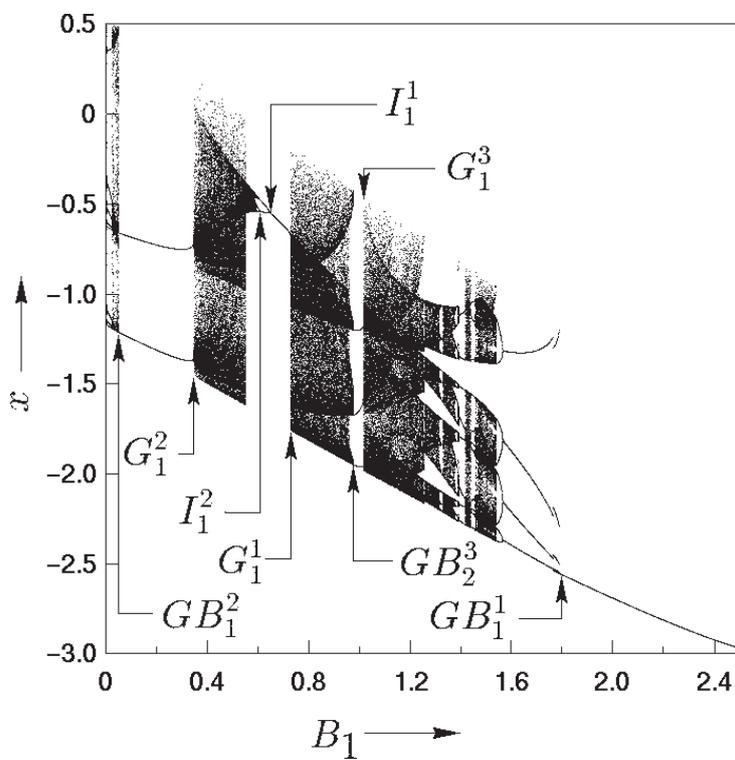


図 5.4.10 図 5.4.8 直線 δ に沿った一方向分岐図 ($B_2=5.0$).

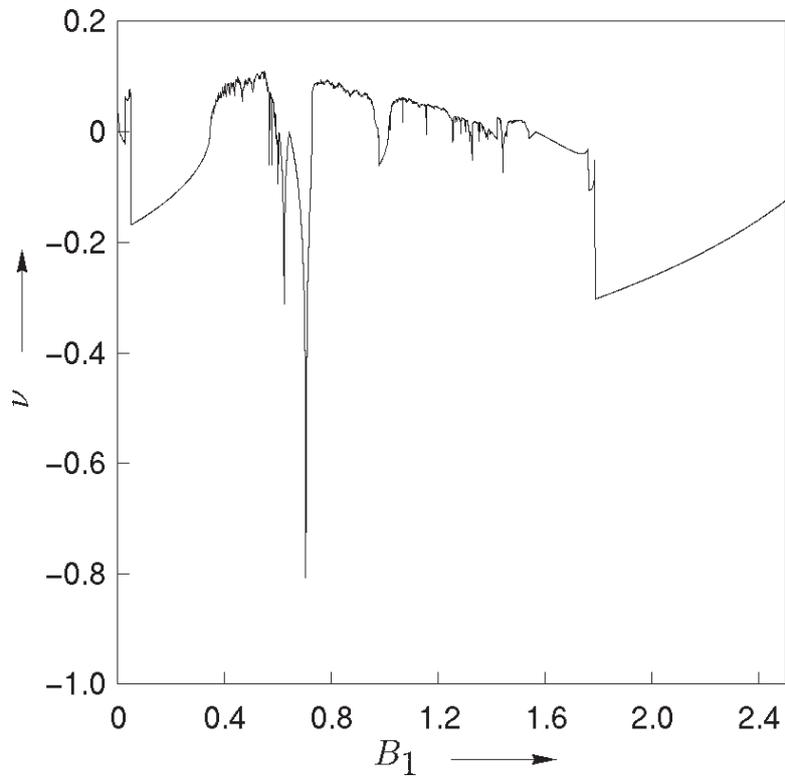


図 5.4.11 図 5.4.8 直線 δ に沿ったリアプノフ指数 ($B_2 = 5.0$).

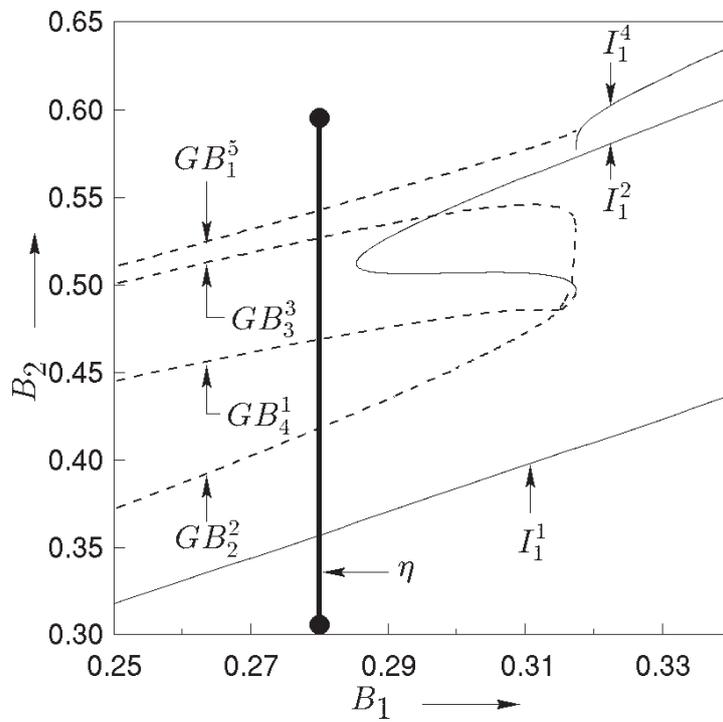


図 5.4.12 図 5.4.6 の拡大図 2.

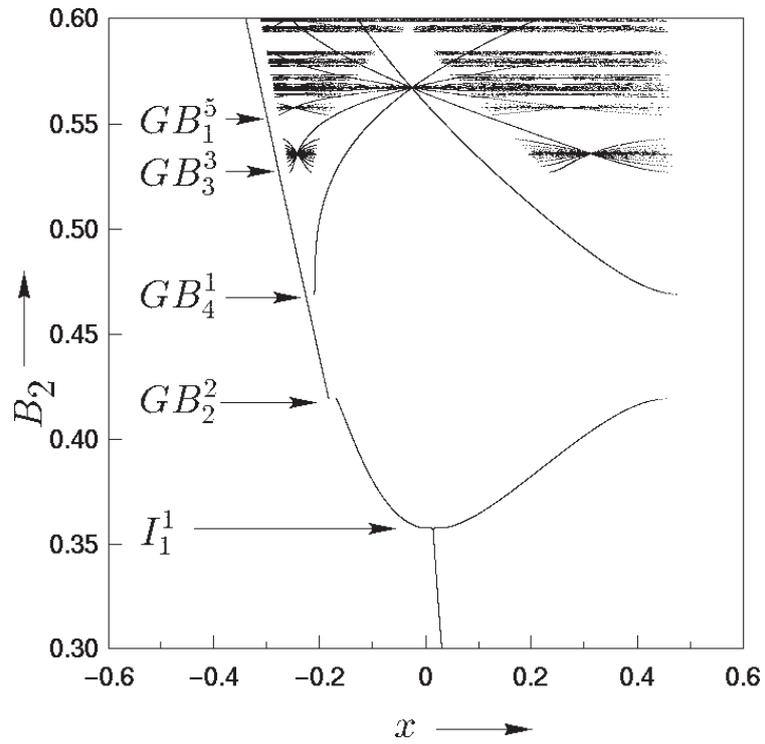


図 5.4.13 図 5.4.12 直線 η に沿った一方向分岐図 ($B_1=0.28$).

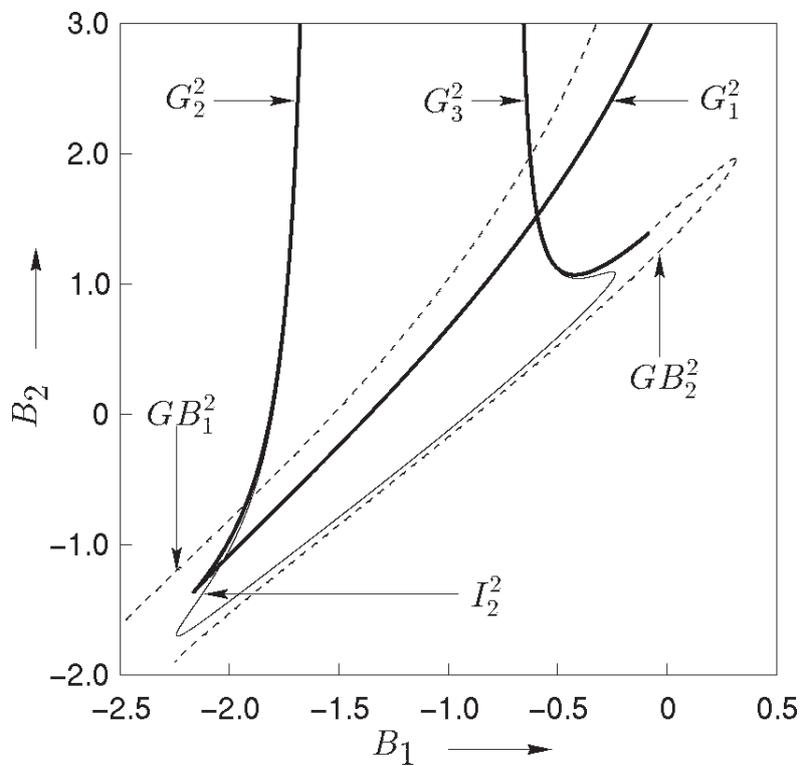


図 5.4.14 図 5.4.6 の拡大図 3.

5.4.6 回路実装

本節では状態依存型断続特性を有する Alpazur 発振器の回路実装を行なう。4.3.4 節と同様の変数変換を行なうことで、式 (5.4.1) および式 (5.4.2) を得る。各素子を次の値に固定したとき、

$$\begin{aligned} L &= 50[\text{mH}], C = 0.1[\mu\text{F}], E_2 = 5.2[\text{V}], R_0 = 0[\Omega] R_1 = 987[\Omega], \\ R_2 &= 281[\Omega], h = -2.6[\text{V}], b = -0.26[\text{V}], r = 70.7[\Omega], \\ a_1 &= -2.145/1000, a_3 = 0.069/1000 \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

ならば、

$$k = 0.1, g_1 = 0.2, g_2 = 2.0, B_2 = 5.0, c_3 = 1463711, \alpha = 0.000827 \quad (5.4.19)$$

であり、

$$B_1 = 0.27E_1, \quad B_2 = 0.96E_2 \quad (5.4.20)$$

$$x = 270.5i, \quad y = 0.38v \quad (5.4.21)$$

を得る。

実際の回路実装においてスイッチ部分には 4.3.4 節と同様にアナログスイッチ 4053 を使用し、制御信号は図 5.4.15 の LM339 を用いたヒステリシス・コンパレータを用いる。その際の V_{IN} , V_{OUT} の関係を図 5.4.16 に示す。抵抗 R_1 , R_2 を用いてコンパレータに正帰還をかけることで $V_{\text{th}}^+ > V_{\text{th}}^-$ を実現している。スレッシュホールド V_{th}^+ , V_{th}^- やヒステリシス幅 V_{hys} は次式より導出可能である。

$$\begin{aligned} V_{\text{th}}^+ &= \left(1 + \frac{R_1}{R_2} V\right) V_{\text{ref}} - \frac{R_1}{R_2} V_1 \\ V_{\text{th}}^- &= \left(1 + \frac{R_1}{R_2} V\right) V_{\text{ref}} - \frac{R_1}{R_2} V_h \\ V_{\text{hys}} &= \frac{R_1}{R_2} (V_h - V_1) \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

$h = -1.0$, $b = -0.1$ は現実の回路においては $V_{\text{th}}^- = -3.52 [\text{V}]$, $V_{\text{th}}^+ = -0.35 [\text{V}]$ に対応している。これらは、式 (5.4.22) において、 $V_{\text{ref}} = -1.75 [\text{V}]$, $R_1 = 10.6 [\text{k}\Omega]$ および $R_2 = 100 [\text{k}\Omega]$ で実現可能である。

直流電圧 E_1 を次のように変化させた際の回路実装結果を図 5.4.3 および図 5.4.4 に示す。

$$\begin{aligned} E_1 &= 2.042 [\text{V}] \rightarrow B_1 = 0.56 \\ E_1 &= 1.823 [\text{V}] \rightarrow B_1 = 0.5 \\ E_1 &= -10.21 [\text{V}] \rightarrow B_1 = -2.8 \\ E_1 &= 6.78 [\text{V}] \rightarrow B_1 = 1.86 \\ E_1 &= 6.63 [\text{V}] \rightarrow B_1 = 1.80 \\ E_1 &= 0.53 [\text{V}] \rightarrow B_1 = 0.145 \end{aligned}$$

数値解析と同様の結果が得られたことがわかる。

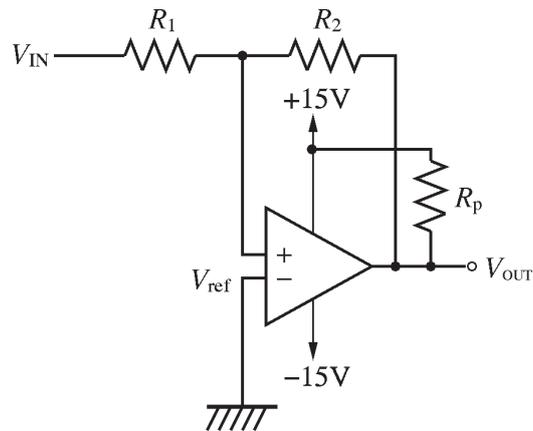
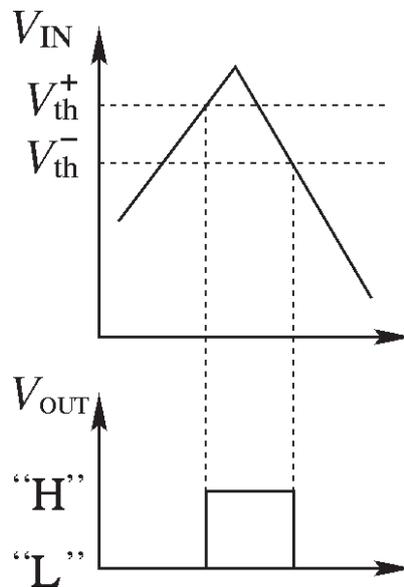


図 5.4.15 ヒステリシスコンパレータ.

図 5.4.16 図 5.4.15 のヒステリシスコンパレータにおける入力 V_{IN} と出力 V_{OUT} の関係.

5.5 むすび

状態依存型断続特性を有する非線形力学系に存在する局所的、大域的分岐曲線の追跡方法を提案した。関数が不連続に切り替わる状態空間上に局所断面を定義することで、可微分写像の合成により Poincaré 写像を表現でき、系が不可微分点を持つ場合でも、合成写像を用いることで Poincaré 写像は微分可能となり、固定点の局所的な安定性の議論が可能となった。大域的分岐についても、時刻を独立変数に選ぶことで分岐集合の導出を可能にした。適用例として、状態依存型断続特性を有する (状態に依存して動作するスイッチを持つ) Alpazur 発振器に対し本手法を適用し、アルゴリズムの正当性を示した。Poincaré 写像の構成方法を示し、発振器にみられる周期解の分岐現象を考察した。ヒステリシス回路には、接線分

岐, 周期倍分岐, 大域的分岐が観測されたが, 本章では、特に H_R^1 周期解についてその分岐構造を明らかにし, 大域的分岐の性質について述べ, 回路実装を行なった.

第 6 章

不安定化制御によるカオスの一生成法

6.1 まえがき

近年，カオスの工学的応用としてカオス制御が注目されている [22]．これは，カオスアトラクタ中に無数に埋め込まれている不安定周期軌道のうちの一つを安定化する問題で，2.4.1 節で述べたように，OGY 法 [24] を始めとする離散時間制御と [52] [53]，Pyragas [23] らの連続時間制御とに大別される．どちらの方法も，目標となる不安定軌道の効率的な安定化が目的であった．

本章では，従来のカオス制御とは逆の視点に立ち，安定平衡点やリミットサイクルを不安定化し，カオス化させることを考える．すなわち，自律系にみられる安定平衡点やリミットサイクルに対し，線形制御理論の極配置法を応用し，軌道の安定性を不安定に操作することによりカオスアトラクタを得る手法について検討した．安定平衡点の場合は，安定平衡点周りの特性方程式の極を不安定に指定した制御器を取り付け，制御を印加する時間を適当に与える．また，リミットサイクルに対しては，Poincaré 写像を定義し，それによって得られる差分方程式系の固定点を不安定化した．これらの制御により安定平衡点，安定リミットサイクルの近傍を弾かれた軌道は，元の系の散逸的性質 (大域的に安定な性質) とあいまってカオスアトラクタとして振舞うことを確認した．適用例として，勾配系回路，van der Pol 方程式，拡張 BVP 発振器のモデルにそれぞれ不安定化制御を施し，得られたカオスについて検討した．

6.2 問題の記述

本章では，次の n 次元自律系を取り扱う：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) \quad (6.2.1)$$

ここで $x \in \mathbf{R}^n$ は状態， $\lambda \in \mathbf{R}^r$ は式 (6.2.1) のパラメータのうち，摂動可能なパラメータ，関数 $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^n$ は各変数，パラメータについて必要なだけ微分可能とする．式 (6.2.1) は，ある固定したパラメータ $\lambda^* \in \mathbf{R}^r$ において，平衡点以外の任意の初期値から出発する解軌道の $t \rightarrow \infty$ における極限は，安定平衡点もしくは安定なリミットサイクルのみであり，カオスアトラクタは存在しないと仮定する．これらアトラクタに対して不安定化制御を施し，安定な軌道を不安定化させる方法について，安定平衡点の場合と安定なリミットサイクルの場合に分けて検討する．

6.3 安定平衡点に対する不安定化

6.3.1 制御器の構成

\mathbf{x}^* を式 (6.2.1) の平衡点とし、パラメータ λ^* に状態フィードバックする不安定制御器を構成する。平衡点周りの変分:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}, \lambda = \lambda^* + u \quad (6.3.1)$$

に関する線形化方程式は次式となる。

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}u \quad (6.3.2)$$

ここで,

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} \quad (n \times n) \quad (6.3.3)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} \quad (n \times r) \quad (6.3.4)$$

式 (6.3.2) に対して次の状態フィードバックを構成する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\xi} = \mathbf{C}^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (6.3.5)$$

ここで \top は転置を表し、 \mathbf{C} は $(r \times n)$ の定行列である。制御を加えたときの系の方程式は次式となる。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda^* + \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\xi}) \quad (6.3.6)$$

このとき、制御系の特性方程式は次式で表される。

$$\left| \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^\top - \mu \mathbf{I}_n \right| = 0 \quad (6.3.7)$$

ここで \mathbf{I}_n は $(n \times n)$ の単位行列である。式 (6.3.7) の極を極配置法により任意に指定することにより、式 (6.2.1) の平衡点周りの局所的な安定性を操作することができる。ここで、制御対象が可制御条件を満たす場合には、任意の極配置が可能である [54]。可制御条件は、

$$\text{rank} [\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \mathbf{A}^2\mathbf{B} | \cdots | \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (6.3.8)$$

で示される。つまり、式 (6.3.8) を満たすとき、式 (6.3.2) に対し極を不安定に指定すれば、平衡点を不安定化する制御系を構成できる。ここで制御を始める条件は、

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta \quad (6.3.9)$$

である。制御対象が安定結節点である場合、制御によって弾かれた軌道が再び安定多様体上に乗ってしまい、周期解が発生する可能性がある。そのため、 δ は、線形近似が意味を失わない程度の大きい値を取る必要がある。

ここで、制御時間を示すパラメータ τ を導入する。式 (6.2.1) の解軌道が平衡点近傍に来る、すなわち式 (6.3.9) を満たすならば、次の手順で制御を行う:

1. 式 (6.3.5) を用い、制御入力 \mathbf{u} を計算する。
2. τ 時間だけ \mathbf{u} を制御パラメータに印加する。

δ 内に式 (6.2.1) の軌道が入るたびに上記の制御を繰り返す。その結果、解軌道は安定平衡点近傍で不安定となり、安定平衡点に落ち着くことはなくなる。

6.3.2 勾配系 (Gradient System)

図 6.3.1 で示される非線形抵抗を含む RC 回路を考える。非線形抵抗は次式で表される特性をもつと仮定する。

$$g(v_2) = -\alpha v_2 + \beta v_2^3 \quad (6.3.10)$$

回路定数を:

$$C_1 = C_2 = 1.0, R_1 = R_2 = 1.0, E = 0.5, \alpha = 2.0, \beta = 1.0 \quad (6.3.11)$$

と固定すると、回路方程式は次式となる。

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = E - 2v_1 + v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = v_1 - [-v_2 + v_2^3] \end{cases} \quad (6.3.12)$$

この回路の位相平面図を図 6.3.2 に示す。ここでは電源電圧を制御して、安定結節点 N_1 を不安定化し、カオスアトラクタを得たいする。

変分を $v_1 = \hat{v}_1 + \xi, v_2 = \hat{v}_2 + \eta, E = \hat{E} + u$ とし、式 (6.3.2) に対応するヤコビ行列 \mathbf{A} および制御パラメータ E の変分 \mathbf{B}_E を求めると $\text{rank}[\mathbf{B}_E | \mathbf{A}\mathbf{B}_E] = 2$ となり、可制御である。従って、制御を加えた系全体の特性方程式は次式となる。

$$\left| \mathbf{A} + \mathbf{B}_E \mathbf{C}^\top - \mu \mathbf{I}_2 \right| = \mu^2 - p\mu + q = 0 \quad (6.3.13)$$

p, q を適当な不安定領域上に置いたとき、制御器 $\mathbf{C} = (C_1, C_2)^\top$ は次式で示される。

$$\begin{aligned} C_1 &= p + (1 - \alpha + 3v_2^2) + 2 \\ C_2 &= -(1 - \alpha + 3v_2^2)(p + (1 - \alpha + 3v_2^2)) - q - 1 \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

$\tau = \text{Runge-Kutta}$ の繰り返し回数 \times 刻み幅 = $700 \times 0.0005, p = 3.0, q = 3.0, \delta = 0.2$ と選び、制御を加えたときの位相平面図を図 6.3.2 に示す。振動的な素子の存在しない系から、カオス的な解軌道を生成することができたことがわかる。

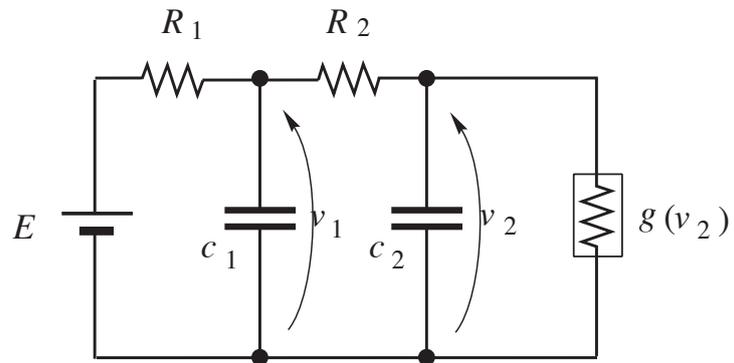


図 6.3.1 RC 回路

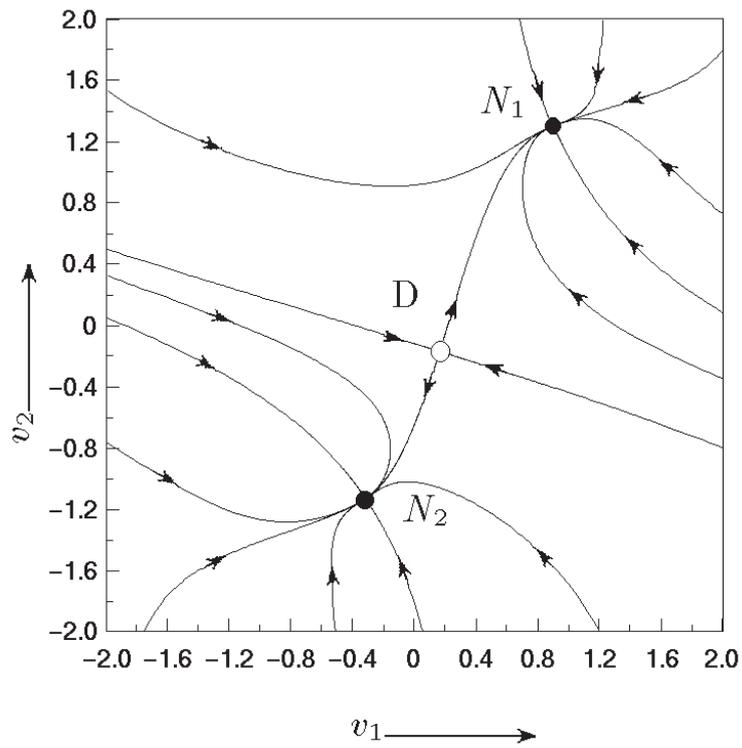


図 6.3.2 RC 回路の位相平面図

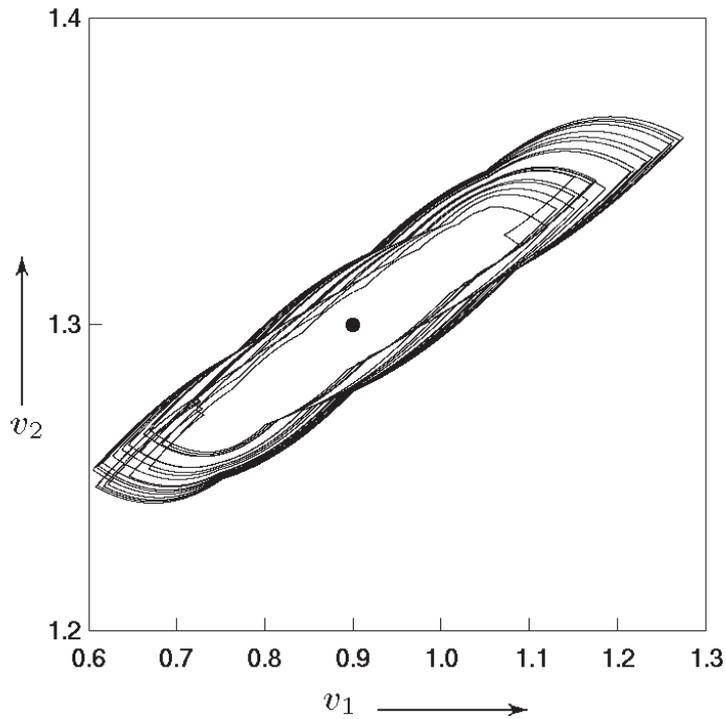


図 6.3.3 RC 回路に制御を加えたカオス状態の位相平面図. ●は安定平衡点 N_1 を示す

6.4 安定なリミットサイクルに対する不安定化

式 (6.2.1) が安定な周期軌道を持つ場合, この軌道を不安定化する問題を考える. Poincaré 写像によって離散化された空間で制御器を設計する.

6.4.1 Poincaré 写像と差分方程式系

初期値 \mathbf{x}_0 を出発する解を次式で表す:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0, \lambda) \quad (6.4.1)$$

次に, 式 (6.2.1) が周期解を持つと仮定する. この周期解に対して, Poincaré 切断面を構成し, Poincaré 写像を,

$$\begin{aligned} T : \Pi &\rightarrow \Pi \\ \mathbf{x} &\mapsto \varphi(L(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}, \lambda) \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

と定義する. ここで, $L(\mathbf{x}_0)$ は $\mathbf{x}_0 \in \Pi$ を初期値とする解軌道が, 再び Π に交わるまでに要する時間であ

る. そのとき, 解は次の初期条件を満たす.

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) \quad (6.4.3)$$

$$\mathbf{x}(0) = \varphi(0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{x}_0 \quad (6.4.4)$$

\mathbf{x}^* を式 (6.2.1) のリミットサイクルの固定点とする. そのとき,

$$\mathbf{x}^* = T(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \varphi(L(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \quad (6.4.5)$$

であり, $L(\mathbf{x}^*)$ はそのリミットサイクルの周期となる. $\boldsymbol{\lambda}$ が摂動可能なパラメータであるとき, $\boldsymbol{\lambda}$ を制御入力に選ぶと, 固定点周りの変分方程式は,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}(k), \\ \boldsymbol{\lambda}(k) &= \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

となる. ここで $\mathbf{x}(k)$ は

$$\mathbf{x}(k) = \varphi(L(\mathbf{x}(k-1)), \mathbf{x}(k-1), \boldsymbol{\lambda}(k-1)) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.4.7)$$

を意味する. 式 (6.4.6) を式 (6.4.5) に代入し,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}(k+1) \\ &= T(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{u}(k)) \\ &= T(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) + DT(\mathbf{x}^*)\boldsymbol{\xi}(k) + DT(\boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{u}(k) + \dots \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

を得る. よって, Poincaré 写像 T による差分方程式系は次式となる:

$$\boldsymbol{\xi}(k+1) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (6.4.9)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= DT(\mathbf{x}^*) \quad (n \times n) \\ \mathbf{B} &= DT(\boldsymbol{\lambda}^*) \quad (n \times r) \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

差分方程式系 (6.4.9) において, 原点が不安定になるように, 入力 $\mathbf{u}(k)$ を決めてやればよいが, n 次元空間 Π においては, 固有値の一つは 1 になっており (周期解条件), この固有空間方向は制御は必要がない. したがって, 次に述べる局所座標空間を考え, その上で制御器の設計を行なえばよい.

6.4.2 局所座標系での制御器設計

いま, Poincaré 切断面はスカラー関数 $q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ によって

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid q(\mathbf{x}) = 0\} \quad (6.4.11)$$

と選んでおく. 今, 点 $\mathbf{x}_0 \in \Pi$ を初期値とする解が, $t = L(\mathbf{x}_0)$ に再び Π と交わる点を \mathbf{x}_1 とする:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(L(\mathbf{x}_0)) = \varphi(L(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \quad (6.4.12)$$

Poincaré 写像の初期値に関する微分は次式となる [55].

$$DT(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}} \mathbf{f} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} = \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}} \mathbf{f} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (6.4.13)$$

また、パラメータによる微分 $DT(\boldsymbol{\lambda})$ は、式 (6.4.13) の $\partial \varphi / \partial \mathbf{x}_0$ を、 $\partial \varphi / \partial \boldsymbol{\lambda}$ に置き換えることによって求められる。

さて、 Π の局所座標として $\mathbf{w} \in \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1}$ を、

$$x_1 = w_1, \dots, x_{n-1} = w_{n-1}, x_n = s(w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (6.4.14)$$

によって埋め込んだとし、この埋め込み写像を h^{-1} とする:

$$\begin{aligned} h^{-1} &: \Sigma \rightarrow \Pi \\ \mathbf{w} &\mapsto h^{-1}(\mathbf{w}) = (w_1, \dots, w_{n-1}, s(w_1, \dots, w_{n-1})) \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

ここで s とは、陰関数の定理により、式 (6.4.11) から導出される関数である。また、射影 h を、

$$\begin{aligned} h &: \Pi \rightarrow \Sigma \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

と定義する。したがって、局所座標上での Poincaré 写像 T_ℓ は

$$\begin{aligned} T_\ell &: \Sigma \rightarrow \Sigma \\ \mathbf{w} &\mapsto h \circ T \circ h^{-1}(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

で表される。 Σ 上での T_ℓ の微分は次式となる:

$$DT_\ell(\mathbf{w}_0) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}} \mathbf{f} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial h^{-1}}{\partial \mathbf{w}} \quad (6.4.18)$$

$$DT_\ell(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \left[\mathbf{I}_n - \frac{1}{\frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}} \mathbf{f} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} \right] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad (6.4.19)$$

となる。なお、詳しい式の導出は、文献 [55] を参照。

制御器の設計をこの局所座標空間 Σ 上で行なう。式 (6.4.5) と同様に、 Σ 上の固定点は、

$$\mathbf{w}^* = T_\ell(\mathbf{w}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = h(\varphi(L(h^{-1}(\mathbf{w}^*)), h^{-1}(\mathbf{w}^*), \boldsymbol{\lambda}^*)) \quad (6.4.20)$$

と表される。変分方程式は、

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k+1} &= \mathbf{w}^* + \boldsymbol{\xi}'(k+1) = T_\ell(\mathbf{w}^* + \boldsymbol{\xi}'(k), \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{u}(k)) \\ &= T_\ell(\mathbf{w}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) + DT_\ell(\mathbf{w}^*)\boldsymbol{\xi}'(k) + DT_\ell(\boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{u}(k) + \dots \end{aligned} \quad (6.4.21)$$

となる。よって差分方程式系は,

$$\boldsymbol{\xi}'(k+1) = \mathbf{A}'\boldsymbol{\xi}'(k) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(k) \quad (6.4.22)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= DT_{\ell}(\mathbf{w}^*) \quad ((n-1) \times (n-1)) \\ \mathbf{B}' &= DT_{\ell}(\boldsymbol{\lambda}^*) \quad ((n-1) \times r) \end{aligned} \quad (6.4.23)$$

である。この差分方程式の解 $\boldsymbol{\xi}'(\mathbf{k})$ が原点に不安定になるように、状態フィードバック:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{C}'^{\top} \boldsymbol{\xi}'(k) = \mathbf{C}'^{\top} (\mathbf{w}(k) - \mathbf{w}^*) \quad (6.4.24)$$

を施せばよい。ここで \mathbf{C}' は $(r \times n-1)$ の制御行列である。つまり、局所座標系で制御器を設計する限り、 $n-1$ 個の状態のみで制御量を決定することができる。ここで可制御条件は次式となる。

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}' \mid \mathbf{A}'\mathbf{B}' \mid \mathbf{A}'^2 \mathbf{B}' \mid \cdots \mid \mathbf{A}'^{n-1} \mathbf{B}' \right] = n-1 \quad (6.4.25)$$

式 (6.4.25) を制御対象が満たすなら、任意の極配置が可能である。制御入力を印加した系の方程式は次式となる。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{C}'^{\top} \boldsymbol{\xi}') \quad (6.4.26)$$

制御開始条件は,

$$\|\mathbf{w}(k) - \mathbf{w}^*\| < \delta \quad (6.4.27)$$

である。式 (6.2.1) の軌道が式 (6.4.27) をみたすとき、上記の不安定化制御をおこない、 $L(\mathbf{w}(k))$ 時間 $\mathbf{u}(k)$ を制御パラメータに加え続ける。その結果、安定固定点を不安定にすることができる。

大きなパラメータ摂動が制御パラメータに加わった場合、分岐現象が生じ、新たに平衡点が発生することで、解軌道が安定平衡点に落ち着くため、Poincaré 切断面 Π に再び交わらない可能性はある。このような場合、 \mathbf{C}' は選び方に自由度があるため、系によって試行錯誤的に適切な極を選べばよい。

この制御系の安定性、可制御条件、具体的な制御器の算出は、文献 [53] を参照。

6.4.3 適用例

6.4.3.1 van der Pol 方程式

van der Pol 方程式は次式で記述される。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \epsilon(1-x^2)y - \omega_0^2 x \end{cases} \quad (6.4.28)$$

$\epsilon = 0.2$, $\omega_0 = 1.0$ の場合の位相平面図を図 6.4.1 に示す。 $\epsilon > 0$ において、原点以外の任意の初期値から出発する解は、時間が十分経つと、図 6.4.1 で示すリミットサイクルに落ち着く。ここで Poincaré 断面を $x=0, y > 0$ と選ぶ。いま、制御パラメータとして ϵ のみを考える。可制御条件である式 (6.4.25) は満

たされているので ϵ を制御パラメータと決定する. ここで式 (6.4.23) の係数行列はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{f_2}{f_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \mathbf{B}' &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \epsilon} - \frac{f_2}{f_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \epsilon} \end{aligned} \quad (6.4.29)$$

で示されるスカラー値となる. これら行列の各要素は, 次の線形微分方程式の基本行列解を数値積分によって $t = 0$ から $t = L(\mathbf{x}_0)$ まで求めるとよい:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial \varphi \\ \partial \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}_0}(t, \varphi(t, \mathbf{x}_0)) \begin{pmatrix} \partial \varphi \\ \partial \mathbf{x}_0 \end{pmatrix} \quad (6.4.30)$$

複素平面上的の不安定領域に固有値を置くことで制御ベクトル \mathbf{C}' を求める. この例では, \mathbf{C}' はスカラー値となる. 図 6.4.1 のリミットサイクルに対し, 不安定化制御を行なった場合の位相平面図を図 6.4.2 に示す. ϵ に最大摂動量 $\max(u) = 1.78$ を加えた位相平面図は図 6.4.3 となる. ここで制御時間は軌道が Poincaré 断面に再び至るまでであり, 制御開始条件は $\delta = 0.1$ とする. $u < -0.2$ ならば制御を加える間, 安定平衡点に向かい, $u > -0.2$ なら, 安定平衡点は不安定となり, $\epsilon = \epsilon^* + u$ となるリミットサイクルを発生させる. そして制御が終了した時点から, 本来の $\epsilon = 0.18$ の場合の軌道となるため, 結果的に図 6.4.3 のリミットサイクルよりも内側の領域内で複雑な位相平面図を生み出す. その他, 制御ベクトルが正の場合, 初期値の位置を図 6.4.1 のリミットサイクルよりも内側の領域に置くか否かによってもまったく異なる位相平面図となる (図 6.4.4, 図 6.4.5). 図 6.4.2 の最大リアプノフ指数は 0.08 でカオスとみなすことができる.

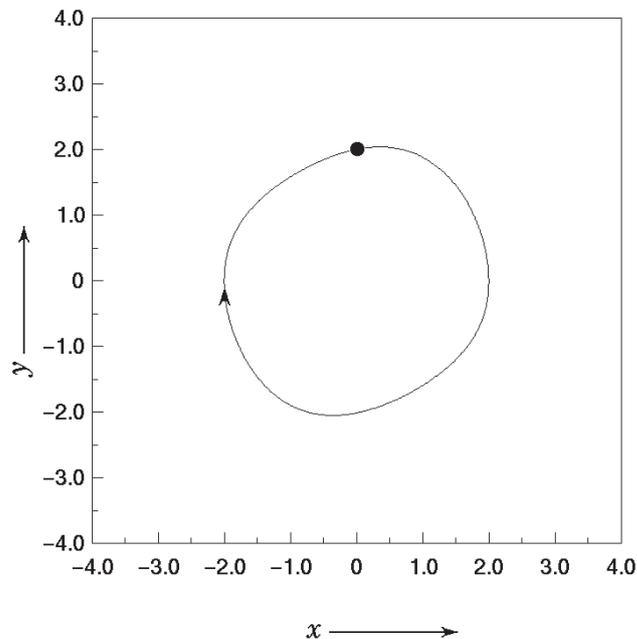


図 6.4.1 $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$ の位相平面図

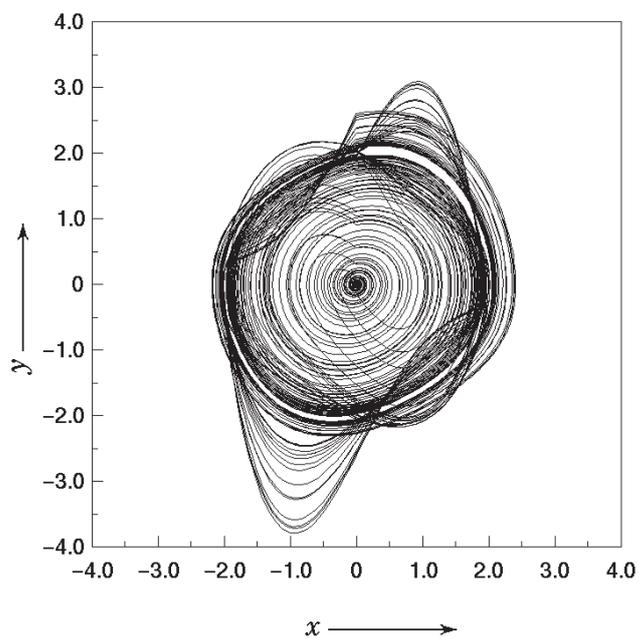


図 6.4.2 $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$ で ϵ に制御を加えた位相平面図 1

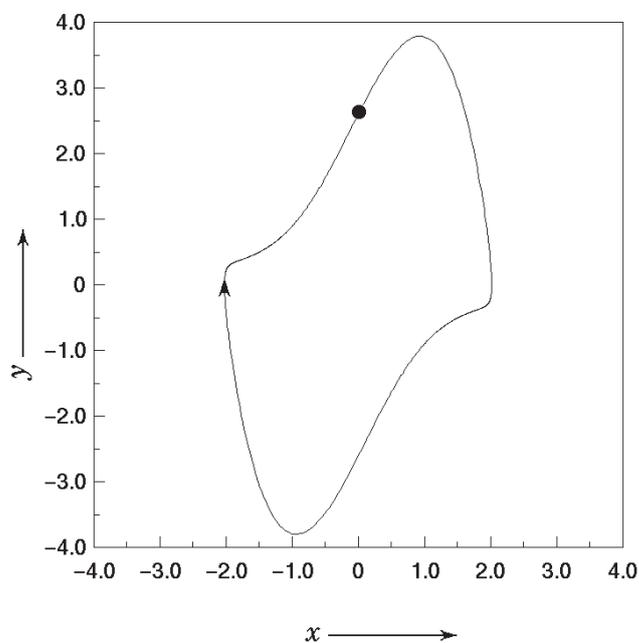


図 6.4.3 $\epsilon = 0.2 + \max(u), \omega_0 = 1.0$ の位相平面図

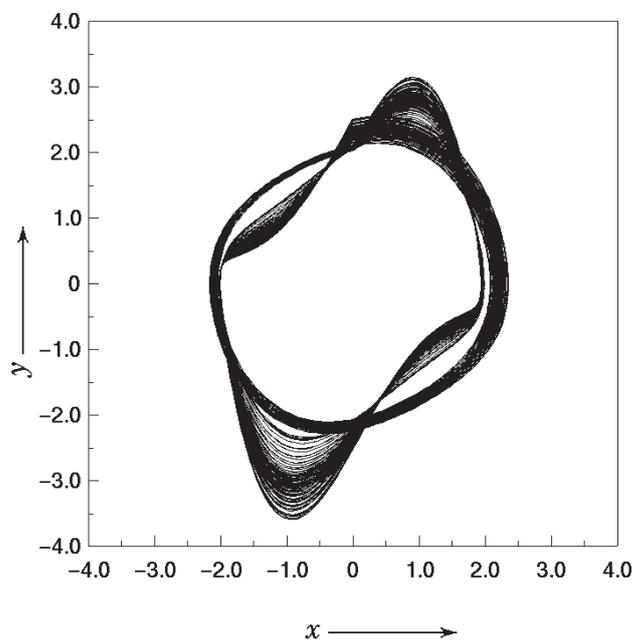


図 6.4.4 $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$ で ϵ に制御を加えた位相平面図 2. 初期値は $(x, y) = (-0.76, 2.88)$ と選んだ

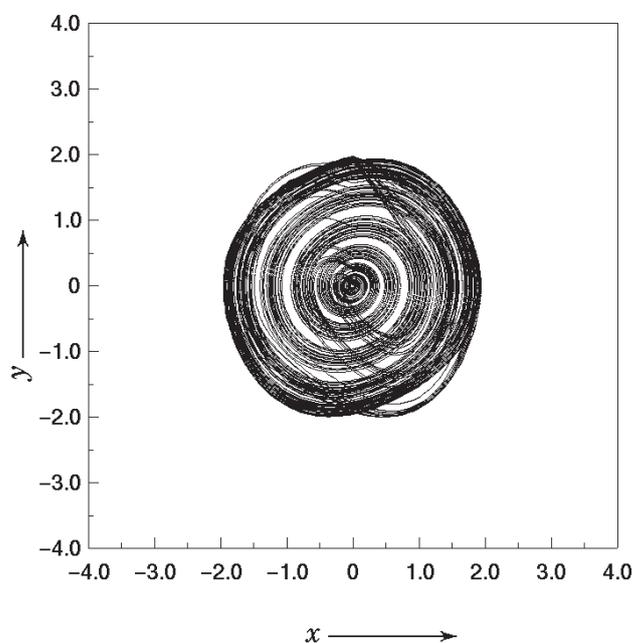


図 6.4.5 $\epsilon = 0.2, \omega_0 = 1.0$ で ϵ に制御を加えた位相平面図 3. 初期値は $(x, y) = (-1.0, -1.0)$ と選んだ

6.4.3.2 拡張 BVP 発振器

吉永, 川上, 吉川らは, 拡張 BVP (Bonhoeffer-van der Pol) 発振器を化学的非線形振動のモデルとして提案した [56]. この回路によって, 油と水の 2 層界面系の定性的性質, すなわち系の自励振動の波形や分岐現象を説明している. 図 6.4.6 に回路図を示す. 回路方程式は, 3 階の自律系常微分方程式となる:

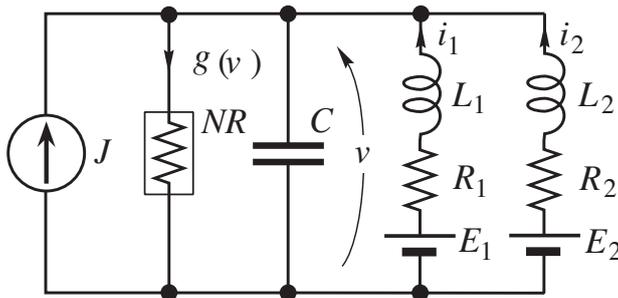


図 6.4.6 拡張 BVP 発振器

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = f_1 = L_1^{-1}(E_1 - R_1 i_1 - v) \\ \frac{di_2}{dt} = f_2 = L_2^{-1}(E_2 - R_2 i_2 - v) \\ \frac{dv}{dt} = f_3 = C^{-1}(i_1 + i_2 + J - g(v)) \end{cases} \quad (6.4.31)$$

図 6.4.6 中の非線形抵抗 NR は次の電圧電流特性を持つと仮定する.

$$g(v) = -v + v^3/3 \quad (6.4.32)$$

この発振器では様々な弛張振動的リミットサイクルが観測される. 今, 回路定数を,

$$R_1 = R_2 = 0.5, L_1^{-1} = 0.4, L_2^{-1} = 0.1, E_1 = 0.2, J = 0, C^{-1} = 3, E_2 = 1.25 \quad (6.4.33)$$

に固定する.

以下, この安定周期解を不安定化する制御器の設計手順を示す.

1. まず, Poincaré 切断面を定める. 周期軌道は平衡点を通る任意平面に横断的であるので, 切断面として例えば,

$$\Pi = \{\mathbf{x}_0 = (i_1, i_2, v) \in \mathbf{R}^3 \mid v = v_0, i_1 + i_2 > i_{10} + i_{20}\} \quad (6.4.34)$$

を取ることができる. 切断面の局所座標系は $\Sigma \in \mathbf{R}^2$ となり, 式 (6.4.11) のスカラー関数は, $q(i_1, i_2, v) = v - v_0 = 0$ が対応する.

2. 制御条件及び 制御時間を決定する. 今回, 制御条件 $\delta = 0.02$, 制御時間は 6.4.3.1 節と同様とする.
3. 制御に用いるパラメータを決定し, 可制御性が満たされるならば制御器のゲインを決定する. ここでは電源電圧 $E_2 \in \mathbf{R}$ を制御パラメータに選ぶ. Σ 上の差分方程式系の係数行列 (6.4.23) は具体的

には,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial i_1} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial i_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial i_2} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial i_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_2} - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_3} - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial i_1}{\partial i_1} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial i_3}{\partial i_1} & \frac{\partial i_1}{\partial i_2} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial i_3}{\partial i_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}' &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial E_2} - \frac{f_1}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial E_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial E_2} - \frac{f_2}{f_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial E_2} \\ \frac{\partial E_2}{\partial E_2} - \frac{f_3}{f_3} \frac{\partial E_2}{\partial E_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.4.35)$$

となる. 行列の各要素は式 (6.4.30) を用い決定できる.

4. $\mathbf{A}' + \mathbf{B}'\mathbf{C}'$ の特性方程式 (固有方程式) が不安定となるように, 制御ベクトル $\mathbf{C}' = (C_1, C_2)$ を決定する. 具体的には \mathbf{C}' は次式により決定される.

$$\left| \mathbf{A}' + \mathbf{B}'\mathbf{C}'^\top - \mu \mathbf{I}_2 \right| = \mu^2 - p\mu + q = 0 \quad (6.4.36)$$

図 6.4.7 の影以外の領域は不安定領域を示している. この領域上に p, q を置くことで C_1, C_2 は式 (6.4.36) より計算される. 今回, $(p, q) = (1.3, 1.3)$ とした.

5. 最後に, 式 (6.4.27) が満たされる時, 式 (6.4.24) を通じて制御入力 $u(k)$ (スカラー) が求まり, 式 (6.4.31) のパラメータ E_2 の摂動として次のようにフィードバックされる:

$$E_2 \rightarrow E_2 + u(k) \quad (6.4.37)$$

図 6.4.8-6.4.9 に i_1 - v 平面における状態平面図を示す.

制御前は図 6.4.8 で示す安定なリミットサイクルが存在しており, このパラメータ値では状態空間内に他のアトラクタは存在しない. 設計手順にしたがって求めた制御器を用いて, 制御をリミットサイクルに対し印加すると, 図 6.4.9 に示す軌道を得る. このとき, 最大リアプノフ指数は 0.03 と算出され, カオスアトラクタが生成できていることがわかる. 制御に要したパラメータ E_2 の摂動量は図 6.4.10 で表されるが, この E_2 の変動は, 周期倍分岐集合の存在するパラメータ値まで届くことはなく, 分岐とは無関係にカオスアトラクタが得られていることは興味深い. $(p, q) = (-1.5, -1.5)$ とした場合, E_2 の変動は周期倍分岐のパラメータに届く. そのため当然カオスアトラクタが得られる. 上述のように適当に指定した不安定な極を用いることで, カオスを生成できるか否かは予めわからない. 本適用例で $(p, q) = (-2.0, -2.0)$ と設定したならば, 6.4.2 節で述べたような新たな平衡点が発生し, 解軌道が Poincaré 切断面 Π に再び交わらない. このような場合, 不安定な極は選び方に自由度があるため, 系によって試行錯誤的に適切な極を選べばよい.

系のパラメータがカオスの窓にある場合, アトラクタに収束するまでの過渡状態は無制御でもカオス的となるため, より少ないパラメータ摂動で安定なカオスアトラクタが得られる. 藤井らはこの性質を利用して, 差分方程式系の周期点付近の軌道学習に応用している [57].

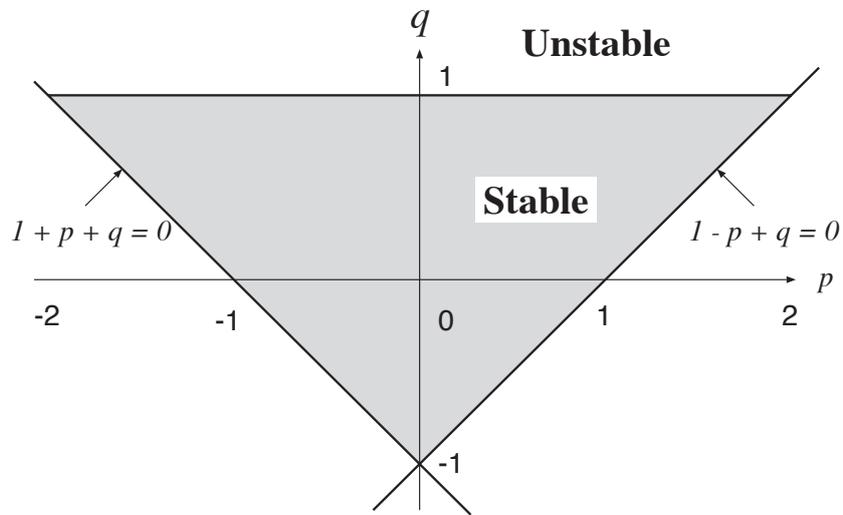
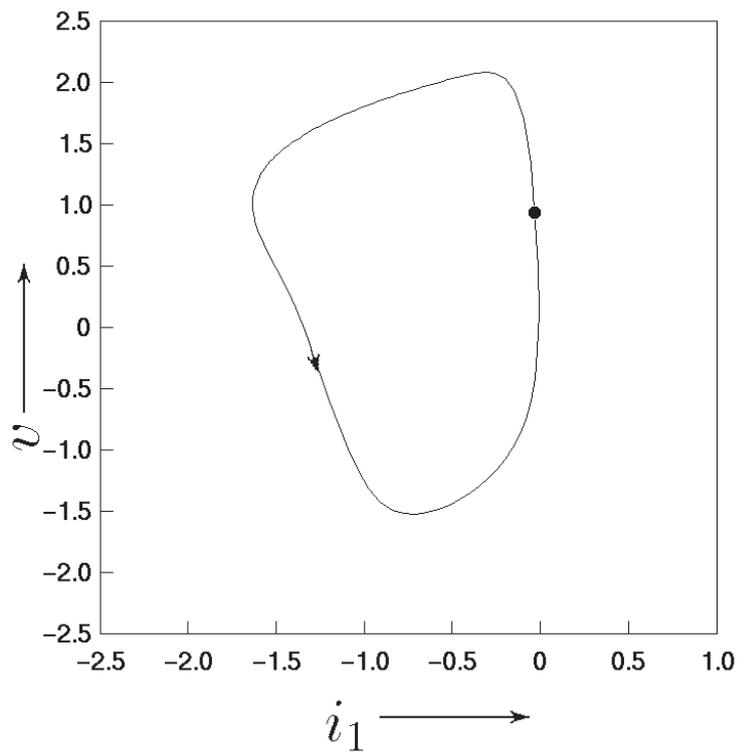
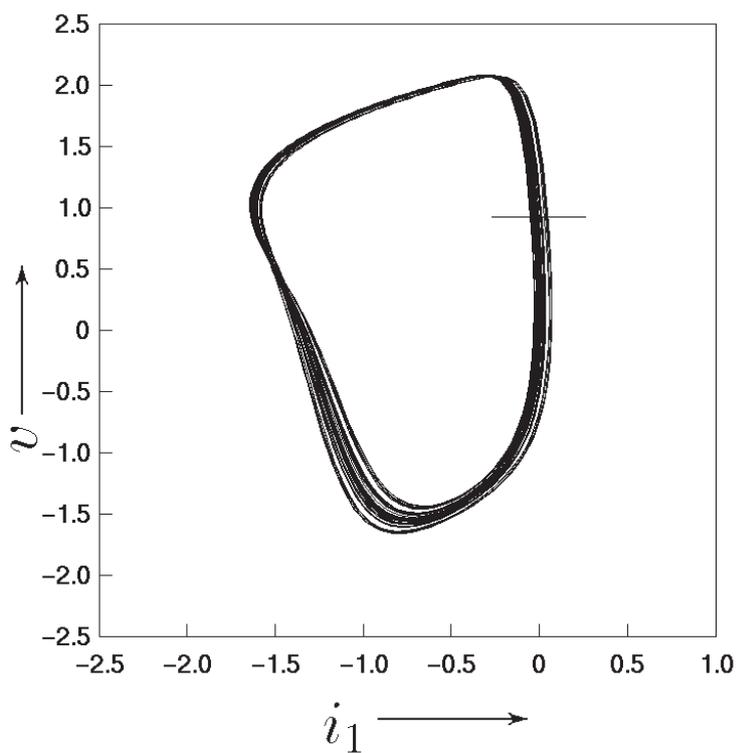
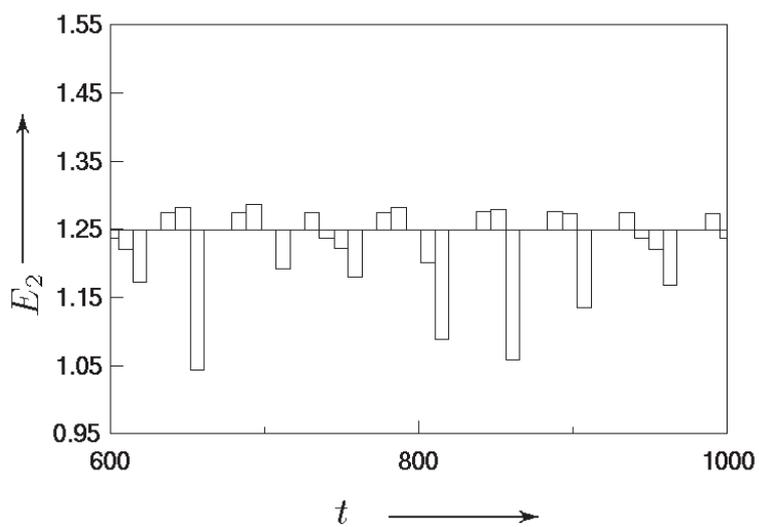
図 6.4.7 (p, q) 平面上での安定性

図 6.4.8 安定なリミットサイクル

図 6.4.9 不安定化されたリミットサイクル, $\delta = 0.02$ と選んだ図 6.4.10 パラメータ E_2 の摂動量

6.5 むすび

カオス制御を応用した軌道の不安定化法を提案した。具体的な解析例として勾配系, van der Pol 方程式, 拡張 BVP 発振器をそれぞれ不安定化し, カオスアトラクタの発生を確認した。

今回の手法では, 得られたカオスの軌道は連続であるが, 比較的振幅が大きいステップ関数の制御入力のため, 連続的に微分可能な曲線とはなっていない。従って, 軌道のなめらかさまで考慮した制御法を見出すことが今後の課題である。

生命現象であるヒトの心臓の拍動では, カオス的変動が健康で, 周期振動を示す状態がむしろ危険であるとの報告がある [58]。提案した手法は, これら望ましくない周期振動を不規則化させる可能性を示しており, 応用が期待される。

第7章

断続動作特性を有する非線形力学系におけるカオスの一制御法

7.1 まえがき

本章では断続動作特性を有する非線形力学系に存在するカオストラクタを制御する一手法を提案する。2.2節 **case a.2** の区分線形系に対しては、文献 [5] [25] [27] において Hunt によって提案された [28] 線形近似を必要としない制御法 (Occasional Proportional Feedback) 法を用いたカオスの制御が行われている。これらの研究はカオス制御を情報処理に応用することを目的としており、そのために必要と思われる条件をもう一度示す。

1. 系にカオスが発生し、カオスは不安定周期軌道の近傍を訪問する (可観測カオスの厳密証明)。
2. 制御目標である不安定周期軌道の計算。
3. 精密かつ高速な不安定周期軌道の安定化。
4. 3. の簡素な実装化。

上記の文献はこれらをほぼ満たしており興味深い。しかし、これらの手法は限られた系への適用であり、任意の断続動作特性を有する非線形力学系への適用を考えた場合、個々の問題としては解析手法が確立されているが、どのような系にでも適用できるわけではない。特に、次の場合問題が生じると思われる。

- 区分線形であっても高次元系の場合。
- 系が非線形で記述されている場合。

このとき、厳密解の導出は不可能になってくるため Poincaré 写像が構成できず、その結果 1. 2. の理論的証明が難しくなる。

そこで、われわれは線形制御法によく用いられる極配置法を応用し、より一般的な断続動作特性を有する系のカオス制御法を提案する。これらの力学系は第4章、第5章で示した場合に分類されるが、各々の場合に関して合成写像を用いて Poincaré 写像を構成できる。その結果不安定周期軌道を生成する初期値を計算することが可能 (つまり 2. を満たす) となる。可観測カオス発生条件は厳密解が導出できないため数学的には示すことは不可能であるが、リアプノフ指数を用いることにより計算可能である (つまり 1. を

満たす). 3. 4. に関しては, OGY 法と同様に目的の周期軌道の近傍まで状態が近づくまで制御を開始しないため即応性は犠牲になるが, 制御可能な領域を先に調べることにより多少改善可能である.

具体的な制御法としては, 線形制御法によく用いられる極配置法を応用した制御法を提案する. 本提案手法は, 基本的には 4 章, 5 章で述べた Poincaré 写像の構成法, 6 章で述べたなめらかな系への制御法を応用した手法である.

例題として, 4 章, 5 章で解析した Alpzur 発振器にカオスアトラクタが観測されたとき, アトラクタに内在する不安定な 1 周期および 2 周期軌道の安定化を行なう.

7.2 問題の記述

次の m 個の自律系を考える.

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x, \lambda, \lambda_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (7.2.1)$$

ここで, $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$. $\lambda \in \mathbf{R}^r$ は f_0, f_1, \dots, f_{m-1} に関して共通なパラメータであり $\lambda_i \in \mathbf{R}^s$ は f_i にのみ依存するパラメータである. ここで f_i は任意の変数およびパラメータに関して必要なだけ微分可能であるとする.

次の 2 つの場合を考える.

- 時刻依存型断続特性を有する (系が外力で動作するスイッチを有する) 非線形力学系の安定化.
- 状態依存型断続特性を有する (系が状態に依存したスイッチを有する) 非線形力学系の安定化.

前者は非自律系であり, 後者は自律系で記述されることに注意する. 方程式も上のスイッチの動作とともに f_i から f_{i+1} に変化する. 式 (7.2.1) の非線形関数 f_i の解軌道は:

$$x_i(t) = \varphi_i(t, x_{i-1}) \quad (7.2.2)$$

初期値は:

$$x_i(0) = x_{i-1} = \varphi_i(0, x_{i-1}) \quad (7.2.3)$$

であるとする. $x_i^*(i = 0, 1, \dots, m-1)$ は式 (7.2.1) の不安定固定点である. $\lambda^* \in \mathbf{R}^r$, $\lambda_i^* \in \mathbf{R}^s$ は固定点 x_i^* を与えるパラメータである. 今, λ_0 を制御パラメータとする.

式 (7.2.1) が解軌道としてカオスアトラクタを持つ場合, カオスアトラクタ中に内在する不安定固定点を安定化する手法を以下に提案する.

7.3 時刻依存型断続特性を有する非線形力学系の安定化

7.3.1 Poincaré 写像と制御系の設計

時刻依存型断続特性を有する非線形力学系の場合、4章の解析手法と同様に、各々の局所的な写像は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 T_0 : \quad \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\
 \mathbf{x}_0^* &\mapsto \mathbf{x}_1^* = \varphi_0(\tau_0, \mathbf{x}_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\lambda}_0^*) \\
 T_1 : \quad \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\
 \mathbf{x}_1^* &\mapsto \mathbf{x}_2^* = \varphi_1(\tau_1, \mathbf{x}_1^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\lambda}_1^*) \\
 &\dots \\
 T_{m-1} : \quad \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}^n \\
 \mathbf{x}_{m-1}^* &\mapsto \mathbf{x}_0^* = \varphi_{m-1}(\tau_{m-1}, \mathbf{x}_{m-1}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\lambda}_{m-1}^*)
 \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

ここで、 $\tau = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i$ は制御したい不安定周期解の周期である。このことから、式 (7.2.1) に一致する Poincaré 写像は次式となる。

$$T = T_0 \circ T_1 \circ \dots \circ T_{m-1} \tag{7.3.2}$$

固定点 \mathbf{x}_i^* 周りの変分方程式は:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}_m^* + \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\lambda}(k) = \boldsymbol{\lambda}_0^* + \mathbf{u}(k) \\
 \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}_1^* + \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\lambda}(k+1) = \boldsymbol{\lambda}_1^* \\
 \mathbf{x}(k+2) &= \mathbf{x}_2^* + \boldsymbol{\xi}(k+2), \boldsymbol{\lambda}(k+2) = \boldsymbol{\lambda}_2^* \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}(k+m-1) &= \mathbf{x}_{m-1}^* + \boldsymbol{\xi}(k+m-1), \\
 \boldsymbol{\lambda}(k+m-1) &= \boldsymbol{\lambda}_{m-1}^* \\
 \mathbf{x}(k+m) &= \mathbf{x}_m^* + \boldsymbol{\xi}(k+m), \\
 \boldsymbol{\lambda}(k+m) &= \boldsymbol{\lambda}_0^* + \mathbf{u}(k+m)
 \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

故に、それぞれの写像 T_i より導出される差分方程式は、

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\xi}(k+1) &= \mathbf{A}_m \boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k) \\
 \boldsymbol{\xi}(k+2) &= \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}(k+1) \\
 &\vdots \\
 \boldsymbol{\xi}(k+m-1) &= \mathbf{A}_{m-2} \boldsymbol{\xi}(k+m-2) \\
 \boldsymbol{\xi}(k+m) &= \mathbf{A}_{m-1} \boldsymbol{\xi}(k+m-1) \\
 \boldsymbol{\xi}(k+m+1) &= \mathbf{A}_m \boldsymbol{\xi}(k+m) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}(k+m)
 \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \left. \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_i^*} \right|_{t=\tau_i, \mathbf{x}=\mathbf{x}_i^*, \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*, \lambda_i=\lambda_i^*} \\ \mathbf{B}_i &= \left. \frac{\partial T_i}{\partial \lambda_i} \right|_{t=\tau_i, \mathbf{x}=\mathbf{x}_i^*, \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*, \lambda_i=\lambda_i^*} \\ & i = 0, 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

式 (7.3.3), 式 (7.3.4) から周期点 \mathbf{x}_0 の差分方程式を得ることが可能である.

$$\boldsymbol{\xi}(k+m) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (7.3.6)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_{m-2}\cdots\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_m, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{A}_{m-2}\cdots\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{B}_m. \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

つまり, T の微分は 各々の写像 T_i の微分の積を取った値と等しい. 例えば初期値 \mathbf{x}_{i-1} に関する微分は次式となる.

$$\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}_{i-1}^*} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{x}_{i-1}^*}, \quad \frac{\partial T_i}{\partial \lambda_{i-1}^*} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_{i-1}^*} \quad (7.3.8)$$

式 (7.3.6) に関して次の状態フィードバックを構成する.

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^\top \boldsymbol{\xi} = \mathbf{C}^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*) \quad (7.3.9)$$

ここで \top は転置を表し, \mathbf{C} は制御行列である. このことから, 制御システムの特性格方程式は:

$$\left| \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^\top - \mu \mathbf{I}_n \right| = 0 \quad (7.3.10)$$

式 (7.3.10) の固定点周りの局所的な安定性は, 極配置法 [54] 等の線形制御法によって制御可能である.

7.3.2 時刻依存断続動作特性を有する Alpacur 発振器に観測されるカオスアトラクタの制御

例題として, 4.3 節で解析を行った回路を考える. 式 (4.3.1) および式 (4.3.2) のパラメータを次の値とする.

$$\gamma = 0.1, \quad g_1 = 0.2, \quad g_2 = 2.0, \quad B_1 = 0.5, \quad B_2 = 2.0, \quad \tau = 8.5, \quad \theta = 0.89 \quad (7.3.11)$$

このとき周期倍分岐のカスケードによって進展したカオスアトラクタが観測される (図 7.5.1(a) 参照). ここでは, $B_2 \in \mathbf{R}$ を制御パラメータとする. 特性格方程式は:

$$\left| \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^\top - \mu \mathbf{I}_2 \right| = \mu^2 - p\mu + q = 0 \quad (7.3.12)$$

p および q は変微分値の多項式で示される. dead-beat 制御を行うために, $p = q = 0$ とし制御ベクトル \mathbf{C} を計算する. これらの解の位置, 固有値および制御ベクトル \mathbf{C} を表 7.3.1 に示す. 例えば固定点に対

しては、式 (7.3.9) は次のように記述できる.

$$\begin{aligned} B_2 &= B_2^* + C_0(x_0 - x_0^*) + C_1(y_0 - y_0^*) \\ &= 2.0 + 1.710698(x_0 + 0.26961) + 6.281655(y_0 + 2.44587) \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

図 7.5.1(b)(c) に安定化された 1, 2 周期のリミットサイクルをそれぞれ示す.

表 7.3.1 固定点および周期点の性質および制御ベクトル C の値

period	fixed or periodic points	eigenvalues	control vector C
1	(-0.95202, 0.13142)	(-0.26961, -2.44587)	[1.710698, 6.281655]
2	(-2.006420, 2.0258)	(-0.00782, -2.24587)	[-0.225786, 12.595479]

7.4 状態依存型断続特性を有する非線形力学系の安定化

7.4.1 局所断面と Poincaré 写像

スカラー関数 $q_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を用いて局所断面 Π_i を次のように定義する.

$$\Pi_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid q_i(\mathbf{x}) = 0\} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (7.4.1)$$

局所断面 Π_i から出発した解軌道が次の断面 Π_{i+1} に到達したとき方程式も f_i から f_{i+1} へ変化すると仮定する. 式 (7.4.1) を用いて次の m 写像が定義できる.

$$\begin{aligned} T_0: \quad \Pi_0 &\rightarrow \Pi_1 \\ &\mathbf{x}_0^* \mapsto \mathbf{x}_1^* = \varphi_0(\tau_0(\mathbf{x}_0^*), \mathbf{x}_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\lambda}_0^*) \\ T_1: \quad \Pi_1 &\rightarrow \Pi_2 \\ &\mathbf{x}_1^* \mapsto \mathbf{x}_2^* = \varphi_1(\tau_1(\mathbf{x}_1^*), \mathbf{x}_1^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\lambda}_1^*) \\ &\dots \\ T_{m-1}: \quad \Pi_{m-1} &\rightarrow \Pi_0 \\ &\mathbf{x}_{m-1}^* \mapsto \mathbf{x}_0^* = \varphi_{m-1}(\tau_{m-1}(\mathbf{x}_{m-1}^*), \mathbf{x}_{m-1}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\lambda}_{m-1}^*) \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

その結果, 式 (7.3.6) と同様に差分方程式を定義できる. ここでスイッチの切り替わり, つまり方程式の切り替わりは方程式に依存していることに注意する.

以下, 局所断面 Π_0 上の $(n-1)$ 次元空間で制御器を設計する.

7.4.2 局所空間 Σ における制御器の設計

Σ は Π_0 内の $(n-1)$ 次元局所空間と仮定する. $\mathbf{w} \in \Sigma \subset \mathbf{R}^{n-1}$ は次式により与えられる.

$$x_{01} = w_1, \dots, x_{0(n-1)} = w_{n-1}, x_{0n} = s(w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (7.4.3)$$

埋め込み写像 p^{-1} を次式で仮定する.

$$\begin{aligned} p^{-1}: \Sigma &\rightarrow \Pi_0 \\ \mathbf{w} &\mapsto p^{-1}(\mathbf{w}) = (w_1, \dots, w_{n-1}, s(w_1, \dots, w_{n-1})) \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

ここで s は式 (7.4.1) 陰関数定理をもちいることで導出可能な関数である.

射影 p も同様に定義する.

$$\begin{aligned} p &: \Pi_0 \rightarrow \Sigma \\ &(x_{01}, \dots, x_{0n}) \mapsto (x_{01}, \dots, x_{0(n-1)}) \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Σ における Poincaré 写像 T_ℓ は:

$$\begin{aligned} T_\ell &: \Sigma \rightarrow \Sigma \\ &\mathbf{w} \mapsto p \circ T \circ p^{-1}(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

以下, Σ における制御器の設計方法を考える. 差分方程式は次式となる.

$$\boldsymbol{\xi}'(k+1) = \mathbf{A}'\boldsymbol{\xi}'(k) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(k) \quad (7.4.7)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \frac{\partial T_\ell}{\partial \mathbf{w}_0} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial p^{-1}}{\partial \mathbf{w}} \\ \mathbf{B}' &= \frac{\partial T_\ell}{\partial \boldsymbol{\lambda}_0} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\lambda}_0} \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

固定点および周期点の安定性は次の特性方程式の特性乗数を計算することで導出可能である.

$$|\mathbf{A}' - \mu \mathbf{I}_{n-1}| = 0 \quad (7.4.9)$$

$\boldsymbol{\xi}'(k)$ が安定になるような状態フィードバック行列 \mathbf{C}' を式 (6.4.24) より構成すればよい. ここで \mathbf{C}' は $(r \times (n-1))$ の制御行列を示し, $(n-1)$ 個の根を安定になるようにわりあてればよい. 式 (7.4.8) の可制御条件は式 (6.4.25) で与えられる.

7.4.3 状態依存断続動作特性を有する Alpazur 発振器

例題として, 4.3 節で解析を行った Alpazur 発振器の制御を考える.

次のパラメータの場合を考える.

$$\gamma = 0.1, \quad g_1 = 0.2, \quad g_2 = 2.0, \quad B_1 = 0.63, \quad B_2 = 3.5, \quad H = -1.0, \quad B = -0.1 \quad (7.4.10)$$

このとき図 7.5.2(a) に示すカオスアトラクタが観測される. ここで, Poincaré 断面は $y=b$ に固定する. パラメータ B_2 は可制御条件を満たしているので, 制御パラメータに選ぶ. この場合, 制御ベクトル \mathbf{C}' はスカラー値である. 固定点の座標, 根を 0 としたの固有値および制御ベクトル \mathbf{C} を表 7.3.1 に示す. 安定化された解 (固定点および 2 周期軌道) を図 7.5.2(b)(c) にそれぞれ示す. カオスアトラクタに内在する不安定な解軌道が安定化されていることがわかる.

表 7.4.1 固定点および周期点の性質および制御ベクトル \mathbf{C}' in Σ の値

period	fixed or periodic points	eigenvalues	control vector \mathbf{C}
1	-0.506965	-1.64963	-42.308830
2	-0.568227	-2.07952	51.257057

7.5 むすび

本章では、一般的な断続動作特性を有する系のカオス制御法を提案した。2種類の不連続特性を有する非線形力学系において、各々の場合に関して合成写像を用いて Poincaré 写像を構成することで、不安定周期軌道を生成する初期値、安定性の計算が可能となった。例題として、2種類のスイッチを持つ Alpazur 発振器を安定化しカオスアトラクタに内在する 1, 2 周期の不安定軌道をそれぞれ得た。本提案手法の回路実装による確認は今後の課題である。

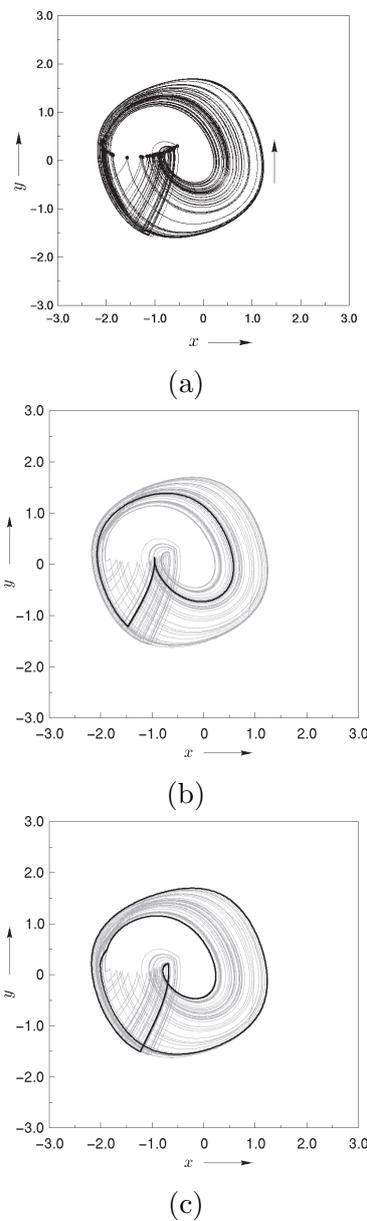


図 7.5.1 カオスアトラクタおよびアトラクタ内に内在する安定化された軌道 ($\gamma = 0.1, g_1 = 0.2, g_2 = 2.0, B_1 = 0.5, B_2 = 2.0\tau = 8.5, \theta = 0.89$). (a) カオスアトラクタ. (b) 制御された固定点 (c) 制御された 2 周期点

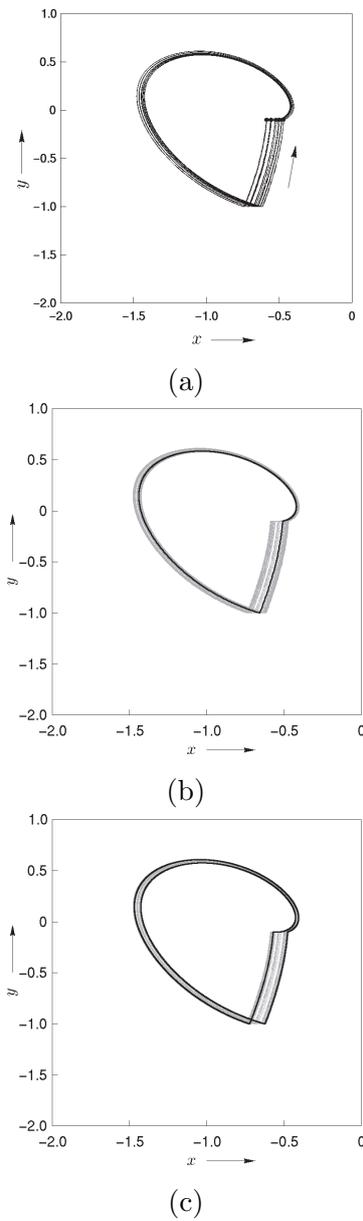


図 7.5.2 カオスアトラクタおよびアトラクタ内に内在する安定化された軌道 ($\gamma = 0.1, g_1 = 0.2, g_2 = 2.0, B_1 = 0.63, B_2 = 3.5H = 1.0B = -0.1$). (a) カオスアトラクタ. (b) 制御された固定点 (c) 制御された 2 周期点

第 8 章

まとめ

本論文では、断続動作特性を有する非線形力学系にみられる周期解の分岐パラメータを計算する手法を提案し解析を行った。本論文で得られた結果を分類すると次の 5 点となる:

- 断続動作特性を有する力学系の分類 (第 2 章).
- 結合した 2 つの方形波発振器に生じる周期解の解析 (第 3 章).
- 断続動作特性を有する非線形力学系における分岐曲線の追跡方法の提案および解析 (第 4 章, 第 5 章).
- 自律系にみられる安定平衡点や安定リミットサイクルにカオスアトラクタを生成する手法の提案 (第 6 章).
- 断続動作特性を有する力学系におけるカオス制御法の提案 (第 7 章).

従来、様々な断続動作特性を有する非線形力学系にみられる諸現象は、一般的な解析手法が提案解析されず、解析に関しても、区分線形系においては詳しく解析がなされているが、その他の場合 (区分非線形系, 高次元の区分線形系), ほとんど解析がなされていなかった。そこで本論文では解析手法を提案し、数値解析, 回路実験により提案手法の正当性を示した。その結果、様々な断続動作特性を有する力学系にみられる諸現象を分岐理論を用いて解明することも可能となった。具体的には:

第 1 章では、本論文の研究目的と概要を述べた。

第 2 章では、断続動作特性を有する力学系を 6 種類に分類し、なめらかな系にみられる周期解の一般的な分岐、断続動作特性を有する系特有の分岐について述べた。そして、本手法の応用としてカオス制御について述べ、断続動作特性を有する系のカオス制御の現状、問題点にふれた。

第 3 章では、ホタルの集団発光を模擬するため、EFF 回路を提案し、2 つの EFF 回路を結合した場合の解析を行なった。EFF 回路を区分線形微分方程式で記述し、1 次元リターンマップを厳密に導出し、結合した EFF 回路が同じパラメータを持つとき、各々の EFF 回路の発光のリズムは同相で同期することを証明した。EFF 回路が異なるパラメータを持つ場合、同系のヒステリシスを含む周期解の発生するパラメータ領域を示した。いくつかの理論的な結果は回路実装によっても確認した。

第 4 章では、時刻依存型断続特性を有する非線形力学系における分岐集合の解析方法を提案した。系の切り替わりが周期的であることを利用して、合成された Poincaré 写像を定義し分岐パラメータの計算が可能となった。具体例として、本手法を時刻依存型断続特性 (周期的に外力で強制的に切り替わるスイッ

チ) を有する Alpazur 発振器と呼ばれる回路および断続 RC 回路に適用した. Alpazur 発振器に関しては, 数値解析, 回路実装によりアルゴリズムの正当性を示し, 得られた Neimark-Sacker 分岐に沿って存在する位相同期解, カオスについて検討を行なった. 断続 RC 回路においては, 一般に 2 つの非線形力学系が時刻依存型断続特性により切り替わる場合のパラメータの変化と系に発生する解軌道に関する考察を行なった.

第 5 章では, 状態依存型断続特性を有する非線形力学系における局所的, 大域的分岐曲線の追跡方法を提案した. 関数が不連続に切り替わる状態空間上に局所断面を定義することで, 可微分写像の合成により Poincaré 写像を表現でき, 系が不可微分点を持つ場合でも, 合成写像を用いることで Poincaré 写像は微分可能となり, 固定点の局所的な安定性の議論が可能となった. 大域的分岐に関しても, 時刻を独立変数に選ぶことで分岐集合の導出を可能にした. 具体例として, 状態依存型断続特性を有する (状態に依存して動作する) スイッチを持つ Alpazur 発振器に対し本手法を適用した. 特に $H_R^1 H$ 周期解についてその分岐構造を明らかにし, 大域的分岐の性質について述べた. 回路実装を行ないアルゴリズムの正当性も示した.

第 6 章では, 自律系にみられる安定平衡点やリミットサイクルに対して, 線形制御理論の極配置法を応用し, 軌道の性質を不安定にするフィードバックを施して, カオスアトラクタを発生させる手法について述べた. 安定平衡点の場合は, その点周りの特性方程式の極を不安定に指定した制御器を取り付け, 制御を印加する時間を適当に与え, リミットサイクルに対しては, Poincaré 写像を定義し, それによって得られる差分方程式系の固定点を不安定化させる制御系を構成し, カオスを発生させた. これらの手法の適用例として, 勾配系回路, van der Pol 方程式, 拡張 BVP 発振器のモデルにそれぞれ不安定化制御を施し, 得られたカオスについて検討した.

第 7 章では, 断続動作特性を有する非線形力学系に存在するカオスアトラクタを制御する一手法を提案した. 2 種類の不連続特性を有する非線形力学系において, 各々の場合に関して合成写像を用いて Poincaré 写像を構成することで, 不安定周期軌道を生成する初期値を計算することが可能となった. 適用例としては, 第 4 章, 第 5 章で解析を行なった Alpazur 発振器を用い不安定な 1, 2 周期解の安定化を行なった.

本研究の延長線上にある興味深い問題としては, 高次元系, 貼り合わされる系が 3 つ以上場合, コンバータ回路, 生体モデルへの本手法の適用などがあり, 現在解析を進めているところである.

謝辞

本論文の全過程を通じて、直接理解ある御指導と御鞭撻を賜りました徳島大学工学部電気電子工学科 川上 博教授，同学部知能情報工学科 上田 哲史講師に心から感謝の意を表します。

本論文の作成にあたり貴重な示唆を賜りました徳島大学工学部知能情報工学科 大恵 俊一郎教授，同学部電気電子工学科 牛田 明夫教授に心から御礼申し上げます。

日頃有益な御助言，暖かい励ましの言葉を頂きました徳島大学工学部電気電子工学科 吉永 哲哉助教授，北島 博之さんに深く感謝致します。

国際会議，国内の学会などで有益な御助言，御激励を頂きました，京都大学 引原 隆士助教授，法政大学 斉藤 利通教授，斉藤研究室の方々に心から感謝の意を表します。

回路実装に関して御助言頂いた徳島大学工学部電気電子工学科 西尾 芳文助教授，牛田研究室の方々，田村 宏文技官に深く感謝致します。

最後に励ましの言葉を頂きました徳島大学工学部知能情報工学科 寺田 賢治講師，B1 講座の学生および OB のの方々に感謝致します。

参考文献

- [1] S. Hayashi, *Periodically Interrupted Electric Circuits*, Denki-Shoin, 1961
- [2] L.O. Chua, M.Komuro and T. Matsumoto, “The Double Scroll Family,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 33, pp. 1072–1118, Nov. 1986.
- [3] N. Inaba, T. Saito and S Mori. “Chaotic Phenomena in a Circuit with a Negative Resistance and an Ideal Switch of Diodes,” *Trans. IEICE* , Vol.**E70**, No. 8, pp.744–754, 1987.
- [4] T. Saito and S. Nakagawa, “Chaos from a hysteresis and switched circuit,” *Phil Trans. R. Soc. Lond.*, vol.A353, pp.47–57, Nov. 1995.
- [5] T. Saito and K. Mitsubori, “Control of chaos from a piecewise linear hysteresis circuit,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 42, pp. 168–172, Dec. 1995.
- [6] K. Mitsubori and T. Saito, “Dependent Switched Capacitor Chaos Generator and Its Synchronization,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 44, pp. 1122–1128, Dec. 1998.
- [7] J. H. B. Deane, “Chaos in a current-mode controlled boost dc/dc converter,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 39, pp. 680–683, Aug. 1992.
- [8] 神野健哉, 斉藤利通. “連続時間ヒステリシス連想メモリの新合成法”. *信学論*, Vol.**J76-DII**, No. 10, pp.2233–2239, 1993.
- [9] T.Nomura, S. Sato, S. Doi, J.P. Segundo, and M.D. Stiber. “Global bifurcation structure of a Bonhoffer-van der Plo oscillator driven by periodic pulse trains”. *Biological Cybernetics*,, **72**:55–67, 1994.
- [10] R.E. Kronauer et al. “Mathematical model of the human circadian system with two interacting oscillators,” *Am. J. Physiol*, **242**:R3–R17, 1982.
- [11] S. G. Lee, S. Kim and H. Kook, “Synchrony and clustering in two and three synaptically coupled Hodgkin-Huxley neurons with a time delay,” *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. 7(4), pp. 889–895, 1997.
- [12] T.Nomura, S. Sato, S. Doi, J.P. Segundo, and M.D. Stiber. “A Bonhoeffervan der Pol Oscillator model of locked and non-locked behaviors of living pacemaker neurons”. *Biological Cybernetics*,, **69**:429–437, 1993.
- [13] 土居伸二, 佐藤俊輔. “BVP 神経モデルの周期パルス列に対する大域的応答特性,” *システム/制御/情報*, Vol. 34, No. 10, pp. 775–781, 1995.
- [14] 吉永哲哉, 川上博. “非線形力学系の分岐問題,” *計測制御*, Vol. 34, No. 10, pp. 817–823, 1995.

- [15] 佐野泰彦, 吉永哲哉, 川上 博. “シナプス結合 Hodgkin-Huxley 方程式にみられる分岐”. 信学技報, Vol. **NLP98-83**, pp. 43–50, 1998.
- [16] H. Kawakami. “Bifurcation of periodic response in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters”. *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, **CAS-31**, 3, pp.248–260, 1984.
- [17] 吉永哲哉, “非線形回路にみられる余次元2の分岐および結合発振器回路の解析,” 慶應義塾大学博士論文, 1992.
- [18] H. E. Nusse and J. A. Yorke, “Border-collision bifurcations including ‘period two to period three’ for piecewise smooth systems”. *Physica*, **D57**, pp.39–157, 1992.
- [19] W.C.Y.Chan and C.K.Tsu. “Bifurcations in Current-Programmed DC/DC Boost Converters,” *IEEE Trans. Circuits and Syst. part I*, Vol. **CAS-44**, No.12, pp 1129– 1142, Dec. 1997.
- [20] Guohui Yuan, Soumitro Banerjee, Edward Ott and, James A. Yorke, “Border-Collision Bifurcations in the Buck Converter”. *IEEE Trans*, Vol. **CAS-45**, No.7, pp.707–716, 1998.
- [21] K. Jin’no, “Chaos and related bifurcation from a simple hysteresis network”. *Trans. IEICE* , Vol.**E79-A**, No. 3, pp.402–414, 1996.
- [22] M. Ogorzalek, “Taming Chaos: Part II—Control”. *IEEE Trans*, Vol. **CAS-40**, No.10, pp.700–706, 1993.
- [23] K. Pyragas, “Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback”. *Phys. Lett. A*, **A170**, pp.421–428, 1992.
- [24] E. Ott, and C. Grebogi, and J. Yorke, “Controlling Chaos”. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64, No.11, pp.1196–1199, 1990.
- [25] T. Saito, K. Jin’no and H. Torikai. “Chaotic artificial neural system and its control”. *Int. J. Electron.*, **Vol. 79**, pp.797–806, 1995.
- [26] T. Tsubone and T. Saito. “Stabilizing and Destabilizing Control for a Piecewise-Linear Circuit”. *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, **CAS-45**, No. 2, pp.1723–177, 1998.
- [27] N. Inaba and T. Nitandai. “OPF Chaos Control in a Circuit Containing a Feedback Voltage Pulse Generator”. *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, **CAS-45**, No. 4, pp.473–480, 1998.
- [28] E.R. Hunt, “Stabilizing High-Period Orbits in a Chaotic System: The Diode Resonator”. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 67, No. 15, pp.1953–1955, 1991.
- [29] R. Roy, T. W. Murphy, Jr, T. D. Majer, Z. Gills and H. R. Hunt , “Dynamic control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system”. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 68, No. 9, pp.1259–1261, 1992.
- [30] 斉藤利通, 神野健哉. “カオスの制御と情報処理について”. 信学技報, Vol. **NLP94-7**, pp. 45–50, 1994.
- [31] K. Kohira, K. Yoshikawa and H. Kawakami, “Self-Synchronization of PET-bottle Oscillator,” *Proc. NOLTA ’98*, pp.389–393, 1998.
- [32] Steven H.Strogatz and Ian Stewart , “Synchronization of rhythm in creatures,” *SCIENTIFIC AMERICAN*(Japanese edition)269(11),pp.58–69,1994.

-
- [33] S. Daan, D. G. M. Beersma and A. A. Borbely, "Timing of Human Sleep: Recovery Process Gated by a Circadian Pacemaker," The American Physiological Society, p.R161, 1984.
- [34] K. Kohari, T. Saito and H. Kawakami, "On a hysteresis oscillator including periodic threshold". IEICE Trans. Fundamentals, Vol.**E760-A**, No.12, pp.2102–2107, 1993.
- [35] 小針憲一, 斉藤利通, 川上博. "しきい値が周期的に変化する弛張発振器に見られるカオスと基本的な分岐現象について". 信学論, Vol.**J77-A**, No. 11, pp.1477–1485, 1994.
- [36] G. A. Petrillo and Leon Glass, "A theory for phase locking of repitiation in cats to a mechanical ventilator," The American Physiological Society, p.R311, 1989.
- [37] Bernabé Linares-Barranco, Edger Aánchez-Sinencio, Angel Rodríguez-Vá and José L. Huertas, "A programmable neural cell," . *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, **CAS-36**, 5, pp.756–762, 1989.
- [38] T.Saito and M.Oikawa, "Chaos and Fractals from a Forced Artificial Neural Cell," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 4, No.1, pp.43–52, 1993.
- [39] K. Kohari, T. Saito and H. Kawakami, "Chaos and Hysteretic Fractals from a Hysteresis Oscillator with Periodic Thresholds," Proc. NOLTA '92, pp.13–16, 1992.
- [40] Y. Kaznelson, "Sigma-finite invariant measures from smooth mapping of the circle," *J.D'Anal. Math.*, Vol31, pp. 744–750, 1988.
- [41] 稲葉直彦, 小倉真. "ダイオードを含む強制レイリー発振器にみられる分岐現象とカオス". 信学論, Vol.**J76-A**, No. 7, pp.942–950, 1993.
- [42] 稲葉直彦, 馬場徳生, 大西正文. "ダイオードを含む強制レイリー発振器の分岐集合". 信学論, Vol.**J78-A**, No. 4, pp.485–492, 1995.
- [43] Y. Yamazaki, T. Saito and K. Mitsubori. "Bifurcation and periodic Response from a Hysteresis Chaos Generator," IEICE, Vol.J79-A, No.8, pp.1404–1411, 1994.
- [44] 松木通孝, 森真作. "周期開閉スイッチを含む振動回路の非同期励振現象". 信学論, Vol.**J77-A**, No. 12, pp.1694–1700, 1994.
- [45] T. Matsumoto, M. Komuro, H. Kokubu, R. Tokunaga. "*Bifurcation*". Springer-Verlag, 1993.
- [46] H. Kawakami and R. Lozi. "Structure and Bifurcations of Dynamical Systems". edited by S.Ushiki, World Scientific, 1992, pp.39–58.
- [47] 斎藤利通. "ヒステリシスカオス発生器について". 信学論, Vol.**J67-A**, No. 12, pp.1162–1167, 1984.
- [48] T. Saito, "On a Coupled Relaxation Oscillator," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, **CAS-35**, 9, pp 1147– 1155, 1988.
- [49] T. Saito. "Reality of Chaos in Four-Dimensional Hysteresis Circuits". *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, **CAS-38**, 12, pp.1517–1524, 1991.
- [50] T. Ueta, M. Tsueike, H. Kawakami, T. Yoshinaga and Y. Katsuta. "A Computation of Bifurcation Parameter Values for Limit Cycles". IEICE Trans. Fundamentals, Vol.**E80-A**, No. 9, pp.1725–1728, 1997.
- [51] Yuri A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, AMS-112, 1995.
- [52] F. Romeiras, and C. Grebogi, and E. Ott, and W. Dayawansa, "Controlling Chaotic Dynamical Systems". *Physica*, **D58**, pp.165–192, 1992.

- [53] T. Ueta, and H. Kawakami, "Composite Dynamical System for Controlling Chaos". *IEICE Trans.*, Vol.**E78A**, No.6, pp.708–714, 1995.
- [54] K. Ogata, "Modern Control Engineering". 2nd. edition, Prentice-Hall International, 1990.
- [55] 勝田 祐司, 川上 博, " 対称性をもつ非線形自律系に見られる平衡点と周期解の分岐," 信学論, Vol. **J75–A**, No.6, pp. 1035–1044, 1992.
- [56] 吉永 哲哉, 川上 博, 吉川 研一, "水・油界面に生じる化学的非線形振動の回路モデル," 信学論, Vol. **J71–A**, No.10, pp. 1843–1851, 1988.
- [57] 藤井 丈二, 中島 弘之, 上田 目完 亮, "不安定制御を用いた周期軌道の学習," 信学 '95 総大 A-75.
- [58] 西江 弘, "生命現象を説明するカオス," 日経サイエンス, 246(3), pp.34–39, 1992.

本研究に関連する原著論文

1. 高坂拓司, 上田哲史, 川上博, “不安定化制御におけるカオスの一生成法,” 信学論 (A), vol.J79-A, no.8, pp.1418–1426, Aug. 1996.
2. T. Kousaka, T. Ueta and H. Kawakami, “Synchronization of Electric Fireflies by using Square Wave Generators,” IEICE Trans. vol.E81-A, no.4, pp.656–663, April 1998.
3. 高坂拓司, 馬越豊, 上田哲史, 川上博, “周期開閉スイッチをもつ非線形回路における分岐,” 信学論 (A), vol.J81-A, no.5, pp.836–843, May 1998.
4. H. Kitajima, Y. Noumi, T. Kousaka, and H. Kawakami, “Forced synchronization of coupled oscillators,” IEICE Trans.(印刷中).

本研究に関連する国際会議

1. T. Kousaka, T. Ueta, and H. Kawakami, “Destabilizing Control of Stable Orbit,” Proc. NOTLA’95, pp.997–1000, Las Vegas, U.S.A. Dec. 1995.
2. T. Kousaka, H. Kawakami, and T. Ueta, “Synchronization of Electric Fireflies of Square Wave Generators,” Proc. NOTLA’96, pp.321–324, Kouchi, Japan, Oct. 1996.
3. K. Fujimoto, T. Kousaka, T. Ueta, and H. Kawakami, “BVP oscillator with periodically switched RC circuit,” Proc. NOTLA’97, pp.479–482, Hawaii, U.S.A., Nov. 1997.
4. T. Kousaka, T. Ueta and H. Kawakami, “Controlling Chaos in Nonlinear Dynamical Systems with Non-Smooth Characteristics,” Proc. NOTLA’97, pp.471–474, Hawaii, U.S.A., Nov. 1997.
5. T. Ueta, T. Kousaka, and H. Kawakami, “Bifurcation of Switched Nonlinear Dynamical Systems,” Proc. ISCAS’98, pp.465–468, Monterey, U.S.A., June. 1998.
6. T. Kousaka, T. Ueta, and H. Kawakami, “Bifurcation of a Nonlinear Circuit with a State-Dependent Switch,” Proc. NOTLA’98, pp.867–870, Crans-Montana, Switzerland, Sep. 1998.

本研究に関連する学会研究会資料等

1. 高坂拓司, 上田哲史, 川上博, “BVP 発振器に見られる分岐現象の解析,” 平 6 四国連大, no.1-13, Oct. 1994.
2. 高坂拓司, 上田哲史, 川上博, “カオス制御を応用した軌道の不安定化によるカオス生成法,” 信学技報, NLP94-102, pp.51–58, March 1995.
3. 杖池雅史, 高坂拓司, 曾根直人, 上田哲史, 西尾芳文, 森井昌克 “カオスを用いた暗号機構の MIME への実装,” 信学技報, OFS95-10, pp.11–16, Oct. 1995.
4. T. Kousaka, T. Ueta and H. Kawakami, “Destabilizing Control of Stable Orbit,” 平 7 四国連

- 大, no.8-5, Nov. 1995.
5. 高坂拓司, 川上博, 上田哲史, “方形波発振器を用いた電子ホタルの同期現象,” 信学技報, NLP96-5, pp.27–32, May 1996.
 6. 高坂拓司, 川上博, 上田哲史, “方形波発振器を用いた電子ホタルの同期現象,” 平 8 四国連大, no.1-20, Aug. 1996.
 7. 高坂拓司, 川上博, 上田哲史, “結合した 2 つの異なる方形波発振器に生じる周期解の解析,” 信学技報, NLP96-145, pp.33–40, Feb. 1997.
 8. 馬越豊, 高坂拓司, 川上博, 上田哲史, “外力と状態で動作するスイッチを含む発振回路の解析,” 信学技報, NLP96-169, pp.77–84, March 1997.
 9. 高坂拓司, 上田哲史, 川上博, “不連続な非線形特性を持つ系にみられるリミットサイクルの分岐,” 信学’97 春大, A-2-36, March 1997.
 10. 高坂拓司, 馬越豊, 川上博, 上田哲史, “状態に依存したスイッチで切り替わる非線形系の分岐,” 信学技報, NLP97-14, pp.97–104, May 1997.
 11. 高坂拓司, 上田哲史, 川上博, 藤本憲市, 林保幸, “断続 RC 回路を持つ BVP 発振器について,” 信学技報, NLP97-112, pp.103–108, Oct. 1997.
 12. 高坂拓司, 上田哲史, 川上博, “状態に依存したスイッチで制御される非線形断続回路のカオス制御,” 平 9 四国連大, no.8-17, Oct. 1997.
 13. 藤本憲市, 高坂拓司, 林保幸, 川上博, “スイッチで制御される RC 回路を付加した BVP 発振器,” 平 9 四国連大, no.1-23, Oct. 1997.
 14. 高坂拓司, 北島博之, 上田哲史, 吉永哲哉, 川上博, “不連続特性をもつ力学系における分岐計算法,” 信学技報, NLP98-30, pp.1–8, June. 1998.
 15. 高坂拓司, 上田哲史, 川上博, “DC-DC コンバータ回路における分岐計算法,” 平 10 四国連大, no.5-3, Oct. 1998.
 16. 木戸高志, 高坂拓司, 川上博, 上田哲史, “方形波発振器の同期現象の解析,” 平 10 四国連大, no.1-15, Oct. 1998.
 17. T. Ueta, T. Kousaka, and G. Chen, “A New Numerical Algorithm for Neimark-Sacker Bifurcation,” 平 10 四国連大, no.1-9, Oct. 1998.
 18. 木戸高志, 高坂拓司, 川上博, 上田哲史, “抵抗で結合した方形波発振器の同期現象,” 信学技報, NLP98-92, pp.9–16, Dec. 1998.