自然科学研究（査読論文）
第 31 巻 1-4 頁（2018 年）

量子論におけるレトロディクション II

井澤 健一 [a)]，谷口 智紀 [b)]

a) 徳島大学大学院社会産業理工学研究部
b) 徳島大学大学院総合科学教育部

Retrodiction in quantum theory II

Izawa K.-I. and T. Taniguchi

Institute of Theoretical Physics, Tokushima University

Abstract

We continue to investigate retrodictive aspects of quantum theory based on the previous paper numbered I. We now proceed to consider quantum mechanics of a single *interacting* particle in one-dimensional space. Under successive mearsurements of particle position and momentum as a wave packet, we argue that a piecewise approximation to the particle motion, when applicable, results in the classical retrodiction just as it results in the classical prediction.

Keywords: Piecewise approximation, Quantum theory, Retrodiction

1 はじめに

古典論においては、物理系の現在の状態を与えると、過去の状態も未来の状態も一意的に決まっている。対して量子論においては、未来の状態は確率的に現実と対応する。過去については、初期的な状態に関する事前確率を想定すれば、未来での測定に対する通常の確率解釈に則って、条件付き確率としてのレトロディクション（遡時予言）を得ることができる [1]。しかしながら、特に古典論との対応を考える場合、事前確率の設定は納まりがよくない。古典論においては、未来も過去も全く同様に予言可能となっており、現在に要求される情報は、どちらの場合も同一の “初期条件” である。

前の論文 I [2] では一次元空間の自由粒子の場合を例にとり、量子論におけるレトロディクションについて考察した。一定の時間間隔で逐次的に位置と運動量の同時測定を行なう理想測定を設定し、運動する正規分布型の波束が最小波束へと帰着する場合の予言的な確率分布を求めた。それに基づいて区間推定に則ったレトロディクションを導き、未来予言の場合と比較すると、区間推定を含む異なったプロセスで得られる結果であるにもかかわらず、未来予言と素朴に対応するレトロディクションになっていた。

この論文では、一次元空間における線形ポテンシャルの下での粒子の場合に関して、自由粒子に対して用いたのと同様の手法により、レトロディクションについて区間推定に基づいた考察を行なう。それに立脚して、一般的なポテンシャルの下での運動に関して考察し、古典論との対応を見る。

次節では、一次元空間において線形ポテンシャルの下にある粒子の波束の時間発展についてまとめる。第 3 節では、それが最小波束へと帰着する位置運動量同時測定 [3] における予言的な確率を求める。それに基

づき第 4 節で、区間推定に則ったレトロディクションを考えて、未来予言の表式と比較する。第 5 節では、以上の結果に立脚して、一般的なポテンシャルの場合について考察する。最終節は本論文のまとめである。

2 等加速度

まずは、一次元空間において線形ポテンシャル $V(x) = -max$ の下にある粒子に関して、その波束の運動を考察しよう。波束としては、 平均運動量 p を持ち空間的に局在する正規分布型の波動関数を取り扱う。

質量 m の粒子に対する Schrödinger 方程式 $(\hbar = 1)$ は、

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) - max\psi(x,t) \tag{1}$$

となる。古典論の場合、粒子は $x(t) = at^2/2$ のように等加速度運動をする。式 (1) の解となる波束は、自由粒子の波束 $\psi(x,t)$ の中心が $x(t)$ で運動する

$$\Psi(x,t) = \psi(x - \frac{1}{2}at^2, t)\exp\left[i\left(maxt - \frac{1}{6}ma^2t^3\right)\right] \tag{2}$$

という式で与えられる。具体的に扱うために、$z = \sigma^2 + it/2m$ に従って位置の分散が広がりながら速度 p/m で進行する自由粒子の波束

$$\psi(x,t) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[ipx - i\frac{p^2}{2m}t - \frac{(x - \frac{p}{m}t)^2}{4z}\right] \tag{3}$$

を式 (2) に代入すれば、

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[i(p + mat)x - i\left(\frac{p^2}{2m}t + \frac{1}{2}pat^2 + \frac{1}{6}ma^2t^3\right) - \frac{\left(x - \frac{1}{2}at^2 - \frac{p}{m}t\right)^2}{4z}\right] \tag{4}$$

と式 (1) を満たし加速する粒子の波動関数 [4] が得られる。

3 同時測定

前節の粒子の運動は、観測による擾乱が無い場合であった。粒子の運動の観測としては、現実的に考えて、その位置と運動量が同時に測定される状況を想定しよう。そこでモデルとして、測定直後の波動関数が分散 σ^2 の最小波束になると設定する。

簡単のため、時間間隔 τ ごとに逐次的に測定が繰り返されるものとし、測定時刻 t から次の測定時刻 $t + \tau$ の間の時間発展を扱う。時刻 t において波動関数が平均運動量 P で $x = Q$ を中心とする位置の分散 σ^2 の規格化された最小波束である場合、時刻 $t + \tau$ における波束の波動関数 $\Psi_{P,Q}(x)$ は前節の結果から、$z = \sigma^2 + i\tau/2m$ として

$$\Psi_{P,Q}(x) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi z^2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[i(P + ma\tau)x - i\left(\frac{P^2}{2m}\tau + \frac{1}{2}Pa\tau^2 + \frac{1}{6}ma^2\tau^3\right) - \frac{\left(x - Q - \frac{1}{2}a\tau^2 - \frac{P}{m}\tau\right)^2}{4z}\right] \tag{5}$$

と書ける。この時刻 $t + \tau$ において、位置と運動量の同時測定結果として平均運動量 p で $x = q$ を中心とする位置の分散 σ^2 の最小波束

$$\psi_{p,q}(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[ipx - \frac{(x-q)^2}{4\sigma^2}\right] \tag{6}$$

が得られる場合について考える。

最小波束は、(過剰) 完全性関係

$$\int \frac{dpdq}{2\pi} \psi^*_{p,q}(x)\psi_{p,q}(x') = \delta(x-x') \tag{7}$$

を満たしているコヒーレント状態 [5] である。従って、規格化された波動関数 $\Psi_{P,Q}(x)$ に対して、

$$\int \frac{dpdq}{2\pi} \left| \int dx \psi^*_{p,q}(x)\Psi_{P,Q}(x) \right|^2 = 1 \tag{8}$$

を満たすことが分かる。つまり、測定結果として最小波束 $\psi_{p,q}(x)$ が得られる確率密度 $\rho(p,q)$ は

$$\rho(p,q) = \frac{1}{2\pi} \left| \int dx \psi^*_{p,q}(x)\Psi_{P,Q}(x) \right|^2 \tag{9}$$

であり、具体的には

$$\rho(p,q) = \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{3\sigma^4+|z|^2}} \exp\left(-\sigma^2 \left[(p-P-ma\tau)^2 + \frac{\left(q-Q-\frac{\tau}{2m}(p+P)\right)^2}{3\sigma^4+|z|^2} \right] \right) \tag{10}$$

と求まる。これは、$a=0$ の場合、前の論文 I の自由粒子の表式に帰着する。

4 遡時予言

前節の結果から、正規分布に関する区間推定に則って、時刻 $t+\tau$ での測定結果として運動量 p・位置 q の最小波束を得た場合、時刻 t で運動量 P・位置 Q であった確率密度は、

$$\Phi(P,Q) = \frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{3\sigma^4+|z|^2}} \exp\left(-\sigma^2 \left[(P-p+ma\tau)^2 + \frac{\left(Q-q+\frac{\tau}{2m}(P+p)\right)^2}{3\sigma^4+|z|^2} \right] \right) \tag{11}$$

という分布であると考えられる。

これは、時刻 $t+\tau$ において、運動量 p・位置 q で位置の分散が σ^2 の最小波束が、Schrödinger 方程式 (1) に従って時刻 t まで "時間発展" した場合、その時の "測定結果" として運動量 P・位置 Q の最小波束を得る確率密度に一致している。

ちなみに、位置だけに着目すると、

$$\rho(q) = \int dp \rho(p,q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi\left(\sigma^4+|z|^2\right)}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\left(\sigma^4+|z|^2\right)} \left[q-Q-\frac{1}{2}a\tau^2 - \frac{\tau}{m}P \right]^2 \right), \tag{12}$$

$$\Phi(Q) = \int dP \Phi(P,Q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi\left(\sigma^4+|z|^2\right)}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\left(\sigma^4+|z|^2\right)} \left[Q-q-\frac{1}{2}a\tau^2 + \frac{\tau}{m}p \right]^2 \right) \tag{13}$$

であり、運動量だけでは、

$$\rho(p) = \int dq \rho(p,q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}} \exp\left[-\sigma^2 \left(p-P-ma\tau\right)^2 \right], \tag{14}$$

$$\Phi(P) = \int dQ \Phi(P,Q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}} \exp\left[-\sigma^2 \left(P-p+ma\tau\right)^2 \right] \tag{15}$$

である。結果的に、これらの確率分布の中心値は、対応する古典論における粒子の振る舞いを記述するものとなっており、レトロディクションに関しては、素朴な時間遡行の妥当性を示している。ただし、この結論は、線形ポテンシャルの場合に位置・運動量の確率分布が正規分布になっていることによっており、一般のポテンシャルに対しては必ずしも当てはまらないと思われる。

5　区分近似

前節まで、線形ポテンシャルの下での波束とその測定についての分析を行なってきたが、最後に以上の結果を用いて、一般的なポテンシャルの場合への拡張を考える。

ポテンシャルが非常に小さな区間において線形関数とみなせるものとする。その区間における粒子の運動は古典論の場合、等加速度運動であると近似できる。量子論の場合においても、古典近似がよく成り立つ場合には、波束の運動に対して古典論と同様の近似を行なうことが可能と期待される。すなわち、一般的なポテンシャルの下での波束について、古典近似が成り立つ状況であるならば、非常に小さい区間ごとに前節までの結果を用いることによってレトロディクションを行なうことが可能であると思われる。

具体的には、中心の位置が $x = Q$ の最小波束から出発して時間間隔 τ の間の Schrödinger 方程式に従う波動関数の時間発展を考えると、波束の遠方でポテンシャルが、波束の指数関数的な減少を打ち消すほどの巨大な影響を及ぼさない限り、波束の中心位置近傍のポテンシャルの振る舞いで、ポテンシャル全体を近似してよいものと思われる。特に、

$$\left|\frac{V(x)-V(Q)}{V'(Q)(x-Q)}-1\right| \ll 1 \tag{16}$$

が $|x-Q| < \Delta$ で満たされるならば、ポテンシャル $V(x)$ を $x = Q$ の周りで線形近似した $V(Q) + V'(Q)(x-Q)$ を用いた時間発展で、時間間隔 τ の間はよい近似になっているであろう。ここで、出発時点の最小波束の平均運動量を P として、

$$\Delta = \mathcal{O}(\sigma) + \frac{|P| + \mathcal{O}(\sigma^{-1})}{m}\tau + \frac{|V'(Q)|}{2m}\tau^2 \tag{17}$$

である。

要するに、波束の幅 σ が小さく、時間間隔 τ が十分小さくて、波束の主要部分が移動する範囲においてポテンシャルの傾きの変化が十分小さいと見なせる状況下では、波束中心周辺でのポテンシャルの線形近似がうまく機能する。このような場合には、波動関数の平均的な位置の時間発展については、“古典（運動の時間間隔 τ の離散化による区分）近似” がよく成り立つことになる。

レトロディクションについても、線形ポテンシャルの場合に素朴な時間遡行が妥当との前節の結果から、同様の状況下においては “古典近似”がよく成り立つ。量子論においては、未来予言に比してレトロディクションは区間推定を含む異なるプロセスで得られるものであるにもかかわらず、古典論で運動方程式の単純な時間遡行から（未来予言と全く同様のプロセスで）得られるレトロディクションの結果と合致するのは、この近似の成立に負っているものと考えられる。

6　おわりに

この論文では、線形ポテンシャルの下での粒子の運動について、量子論におけるレトロディクションを具体的に考察した。正規分布に関する区間推定に則って、その場合における過去の確率を求めたところ得られた結果は、前の論文 I で明らかになった自由粒子の場合と同様、過去に向かって “時間発展” した際、その時の “測定結果” として、あたかも未来予言であるかのごとく得られる確率に一致していた。

また、その分析に基づくと、一般的なポテンシャルにおいても、古典近似がよく成り立つ状況においては、得られた素朴な時間遡行の表式に基づく近似的なレトロディクションが可能であることが分かった。

他方、以上の結果は、より一般のレトロディクションについてそのまま当てはまるとは限らず、課題を残すものとなっている。

謝　辞

本研究の端緒は徳島大学素粒子論研究室におけるセミナーにあります。主催した日置善郎教授をはじめ、参加メンバーとの議論に感謝します。

文　献

[1] S. Watanabe, Rev. Mod. Phys. **27** (1955) 179.

[2] 井澤健一，谷口智紀，自然科学研究 **30** (2017) 1.

[3] 例えば、A. Holevo, “Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory,” (2011) Edizioni della Normale.

[4] E.H. Kennard, J. Franklin Inst. **207** (1929) 47.

[5] J.R. Klauder and B.S. Skagerstam, “Coherent States,” (1985) World Scientific.

論文受付：*2017* 年 *12* 月 *22* 日
論文受理：*2019* 年　*3* 月　*1* 日