自然科学研究（査読論文）
第 32 巻 1-4 頁（2020 年）

超対称性の再考 I

井澤 健一

徳島大学大学院社会産業理工学研究部

Supersymmetry reconsidered I

Izawa K.-I.

Institute of Theoretical Physics, Tokushima University

Abstract In the general framework based on algebraic construction of quantum theory, we consider one of the simplest algebraic relations for a single operator as an additional structure to determine the Hamiltonian as a basic ingredient of a concrete quantum system. The Hamiltonian may be uniquely given with the single operator through the condition that it provides the simplest nontrivial automporphism of the additional algebraic structure as well as that of the Hilbert space structure. The resultant Hamilonian turns out to constitute a supersymmetry algebra.

Keywords: Quantum theory, Nilpotency, Idenpotency, Central element, Hamiltonian, Supersymmetry

1　はじめに

この小論の目的は、自然の物理的な基本法則の候補として、（現在までのところ実験的な直接証拠が得られていない）超対称性 [1] の原理的な存在理由を考察することである。無論、超対称性の存在を導出できたとしたら、それは実はその存在を含む前提を置いているからであって、自然法則が演繹的に “無” から導出されることは論理的にありえず、同等以上の仮定をしたに過ぎないとは言える。

つまり、超対称性という結論を何らかの前提条件に言い換える試みをするに過ぎないのではあるが、論理的に同等な言い換えでも意味がないとは限らない。例えば、いわゆる弱い人間原理のような議論は、何か恣意的な仮定を置いたというよりは、目的とする物理法則の定義そのものに含まれる内容と見なせるように思われる。弱い人間原理の議論によって、例えば自由場の理論は、実験観測に必須の相互作用をもたないことにより、自然を完全に記述する理論ではあり得ないと初めから結論付けることができる訳である。

以下の考察で得られる前提には、そこまでの必然性はなく、恣意性は否めない段階ではあるが、恣意性を減らす出発点として、ヒントを与えることができるかも知れないと考える。

考察の枠組みとしては、代数的量子論 [2] を設定しよう。これは、量子論においてヒルベルト空間や演算子が実験的な測定値に関連して用いられることになる理由の一つの原理的な理解の道として、代数的な設定から測定の話を始めるやり方である。この立場では、物理法則は演算子 (より原理的には C^* 代数の元だが、以下では有界には限らない）の代数関係で表されることが自然であり、その具体形を単純な形から探ってゆくことになる。

具体的に量子系を規定するために、ヒルベルト空間

あるいは演算子代数の自己同型を与える “ハミルトニアン演算子” の決定を試みる。この自己同型の存在は、物理系の記述の構造が時間発展に対して保たれることを要請するものだと思われる [3]。

次節では、ハミルトニアン演算子の満たす単純な関係式について検討する。第 3 節では、それに基づきハミルトニアンを決定する法則を与える。第 4 節は、結果として得られる超対称性を確認し、法則の単純性の明瞭化に関して指摘する。最終節では、この小論の議論を進展させる続編の展望を述べる。

2　単純な関係式

この節では、物理法則の採択基準として、単純性という曖昧にも思える観点を、代数的な設定のもとに具体化してゆこう。

2.1　H のみの場合

まず、未知の演算子として目的のハミルトニアン H のみを用いて, それを決定しうる代数的な関係式で単純なものを考察しよう。最も単純だと思われるのは、H を直接指定する $H = 0$ や $H = 1$ であろうが、これは見るからに制限が強すぎて、現実の物理世界を記述するのには不適切であろう。

もう少し間接的に H を定める関係式として、単純な方程式を考えてみると、$H^2 = 0$ や $H^2 = 1$ あるいは $H^2 = H$ といったものがありうるが、これらも自己共役性 $H = H^\dagger$ から、H 自身の固有値を 0 または ± 1 に制限してしまい、やはり適切ではない (物理的に自明な）ハミルトニアンを与えるものと思われる。

2.2　Q の導入

上記のように、H のみの関係式では強い制限になりすぎるので、それを回避するために、H とは別の新たな未知演算子 Q を導入して、その満たす関係式を用いてより間接的に H を制限することを考えよう。演算子 Q に対して直接的な $Q = 0$ や $Q = 1$ を課してしまっては新たに Q を導入した意味がないので、一つの演算子 Q に対して課すことのできる最も単純な形の代数的関係式として、ここで

$$\text{冪零}: Q^2 = 0, \tag{1}$$

$$\text{冪単}: Q^2 = 1, \tag{2}$$

$$\text{冪等}: Q^2 = Q, \tag{3}$$

の 3 つを採り上げる。

この内、冪等の場合は、$\tilde{Q} = 2Q - 1$ とすることで、$\tilde{Q}^2 = 1$ となり、冪単の場合に帰着させることができる。さらに、代数的な中心要素 Z を導入することで、冪零と冪単の場合を統一して取り扱うことが可能となり、結局

$$Q^2 = Z \tag{4}$$

という代数関係を出発点として設定することができる。これに中心要素 Z の満たす交換関係

$$[Z, Q^\dagger] = 0 \tag{5}$$

を加えたものが我々の基本的な代数構造である。ここで Z は独立な中心要素であるが、$Z = Q^2$ から Q で生成されていると見なすこともできる。また、Z を 0 や 1 に固定したい場合は、以下でそのように読み替えればよく、強いて言えば $Q^2 = 0$ が最も単純な要請であると思われるが、0 と 1 の差は恣意的に過ぎるかも知れない。不定性なく単純な代数を決定しているという意味では、Z と 0 や 1 に大きな差はないとも思える。

2.3　自己同型の生成子

上記で導入した代数構造を用いてハミルトニアン H に制限をつける訳であるが、Q の満たす上記の関係を基本的な構造とみなしたからには、H については、それを尊重する性質を要請するのが妥当であると考えられる。もともと H はヒルベルト空間の自己同型を与えるユニタリ変換の生成子であった。従って、自然な可能性として考えられるのは、前節で導入した代数関係を保つことも条件として加えた自己同型、すなわち構造全体としての自己同型の生成子として H を規定することであろう。

一般にハミルトニアンは 1-パラメータの自己同型を生成する生成子であるが、更にそれが上述の代数関係 $Q^2 = Z$ を含めた自己同型であることを要請することにより、今設定している構造におけるハミルトニアンを決定しよう。パラメータを t として H で生成されるユニタリ変換の下で、Q は $\exp(itH)Q\exp(-itH)$ と変換する。構造を定める演算子 Q がこの変換で不変だとすると、

$$[Q, H] = 0 \tag{6}$$

が要請される。また、中心要素としての定義から $[Z, H] = 0$ が成り立つので、Z も不変であり、あわせて代数関係 $Q^2 = Z$ が不変になることをこの要請は保証している。

以下では、基本的な関係式 $Q^2 = Z$ に従う Q をもとにしてハミルトニアン H を含む構造を規定するために、Q の生成する多項式環を考え、その元として $H = H(Q)$ の決定を試みる。

3　多項式環の元

次の様に定義する演算子

$$\tilde{H} = QQ^\dagger + Q^\dagger Q \tag{7}$$

に対して、式 (4),(5) より

$$[Q, \tilde{H}] = [Q, QQ^\dagger + Q^\dagger Q] = ZQ^\dagger - Q^\dagger Z = 0, \tag{8}$$

が成り立つ。従って、Q（及び $Q^\dagger$, Z, $Z^\dagger$）から生成される多項式環の元は一般に

$$J = f_{00}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger) + f_{10}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)Q + f_{01}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)Q^\dagger + f_{11}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)QQ^\dagger, \tag{9}$$

と書ける。ここで、$f_{kl}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)$ は多項式関数である $(k, l = 0, 1)$。

交換関係

$$[Q, J] = 0 \tag{10}$$

を要請してみよう。

$$[Q, f_{01}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)Q^\dagger + f_{11}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)QQ^\dagger] = f_{01}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)(2QQ^\dagger - \tilde{H}) + f_{11}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)(2ZQ^\dagger - Q\tilde{H}) \tag{11}$$

なので、

$$f_{01}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger) = f_{11}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger) = 0 \tag{12}$$

であるならばよく、

$$J = f_{00}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger) + f_{10}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger)Q, \tag{13}$$

となる。

更に、自己共役性

$$J = J^\dagger \tag{14}$$

を要請すると $f_{10}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger) = 0$ となり、

$$J = f_{00}(\tilde{H}, Z, Z^\dagger) = f_{00}^\dagger(\tilde{H}, Z, Z^\dagger), \tag{15}$$

に帰着する。これが、代数関係 $Q^2 = Z$ を不変に保つハミルトニアンの候補となる。

このうち、非自明で最も単純な選択は

$$J = \tilde{H}, \tag{16}$$

であろう。すなわち、我々のハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2}(QQ^\dagger + Q^\dagger Q), \tag{17}$$

と定めることができる。この選択により、Q と $Q^\dagger$（及び Z と $Z^\dagger$）から生成される多項式環の元に対して、積の順序を入れ替えた結果を規定する（反）交換関係による代数構造が与えられることになる。

4　超対称代数

前節までの考察により得られた代数関係をまとめると、式 (4) とともに、ハミルトニアン H に対し

$$\{Q, Q^\dagger\} = 2H, \quad [Q, H] = 0, \tag{18}$$

を満たす演算子 Q の存在を意味する。ここで、$\{,\}$ は反交換子を表す。これは丁度、超対称代数になっている。つまり、現実的な物理法則として、代数的量子論の枠組の中で最も単純な関係式を追及した結果、超対称性に到達したことになる。

もちろん、色々な恣意性のある仮定を導入してこの結論に至ったことは言うまでもないが、このような枠組においては、法則の単純性という曖昧な概念が、かなり具体的な原理として機能し得る可能性を示すことはできたのではないかと考える。例えば、代数的な設定における物理法則を表す数式として $Q^2 = 0$ や $Q^2 = 1$ が単純性をもっているとする主張は、単純という用語の曖昧さに影響されにくいと思われるからである。

5　おわりに

この小論においては、物理法則を “演繹的” に決定することを試みて、超対称性を導出した。しかしながら、この超対称性の要請を満たす理論は、様々なものが具体例として存在する。限定的過ぎて現実的ではないハミルトニアン $H = 0$ や $H = 1$ などの例を排除して進んだ結果、基本法則としては唯一性に欠けて制限が弱すぎる段階に到達したに留まっている。要請されたのは $Q^2 = Z$ に従う Q の存在に過ぎない。

基本法則としては、現実を記述できる容量をもちながら、できる限り理論を唯一性のあるものに決定する絞り込みを行ないたい。その点の考察を進めることが続編の課題となる。

文　献

[1] 例えば、P.G.O. Freund, “Introduction to Supersymmetry,” (1986) Cambridge University Press;
J. Wess, J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity,” (1992) Princeton University Press.

[2] 例えば、F. Strocchi, “An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics,” (2008) World Scientific;
G.G. Emch, “Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory,” (2009) Dover Publications.

[3] 例えば、B. Simon, Quantum Dynamics, “Studies in Mathematical Physics,” (1976) Princeton University Press, 327.

論文受付：*2020* 年 *4* 月 *7* 日
論文受理：*2020* 年 *5* 月 *14* 日